COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 SEPTEMBRE 1843.

PRÉSIDENCE DE M. SERRES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

Réponse de M. Libri *à la Note insérée par* M. Liouville, *dans le* Compte rendu *de la séance du* 21 *août*.

« En présentant, il y a peu de jours, à l'Académie, quelques remarques simples et succinctes sur la part qui me semblait devoir m'être attribuée dans la résolution de certaines équations dont les géomètres se sont occupés récemment, je ne devais pas m'attendre à voir la discussion prendre les proportions que M. Liouville s'est efforcé de lui donner. L'Académie se rappelle la marche de cette discussion : le premier jour, au lieu de traiter le fait en lui-même, M. Liouville, après avoir déclaré avec une grande assurance que *les géomètres n'admettront jamais* mes droits sur ce point, ajouta que d'ailleurs ma démonstration était inexacte et qu'il s'engageait à le prouver *dans huit jours*. Malgré mes vives instances, mon adversaire persista à demander un délai pour produire des arguments qui auraient dû être toujours présents à son esprit si son assertion, au lieu de s'appuyer sur une opinion préconçue, n'avait eu qu'un fondement scientifique. A la séance suivante, M. Liouville, dans une communication verbale très-développée, se livrant à la critique d'un de mes Mémoires, annonça qu'il était rempli d'erreurs graves, que

dans mes travaux le vrai était mêlé au faux d'une manière inextricable, et se donna le plaisir de développer des démonstrations que tout le monde connaît, et de mêler à cette discussion beaucoup de choses étrangères. J'avoue que si j'avais pu être quelque peu sensible aux circonstances extérieures, les formes de cette discussion auraient dû m'impressionner vivement. Tout le monde se rappelle ce ton si absolu, ce geste si impératif et ces mots si souvent répétés, de *démonstration fausse* et d'*erreurs graves* qui m'étaient adressés sous forme de réquisitoire en présence d'une foule d'auditeurs qui, dans une discussion délicate et difficile, devaient, pour la plupart, s'en tenir à la forme et ne pouvaient nullement juger le fond de la question; car cette question ne saurait être complétement éclaircie qu'à l'aide des signes et des notations analytiques. Mais, d'un côté, les accessoires d'une discussion ne produisent jamais aucune impression sur moi; et d'ailleurs, me rappelant que M. Liouville avait déjà critiqué les travaux d'autres géomètres, qu'il avait déjà proclamé les erreurs de MM. Laplace, Cauchy, Yvory et Duhamel, je me consolais en songeant que je me trouvais en excellente compagnie, sans me préoccuper nullement de l'effet produit sur l'auditoire par les assertions de mon adversaire et sans faire attention à l'acerbité de ses paroles. Je le priai donc de formuler par écrit son opinion, afin que les géomètres de profession, qui sont les seuls juges compétents en cette matière, pussent bien comprendre de quoi il s'agissait. En rédigeant ses critiques, M. Liouville a dû s'appliquer naturellement à rectifier ses premières assertions, qui ont été considérablement modifiées à l'impression. Si je ne cherchais que le plaisir de réfuter M. Liouville et de le trouver en faute, je me plaindrais de ces modifications; mais comme, en repoussant cette attaque, je ne veux m'appliquer qu'à chercher la vérité, je les accepte, et je vais répondre à sa Note écrite, en reprenant une à une ses objections. En commençant cette réfutation, je dois déclarer à l'Académie que les critiques de M. Liouville n'ont aucun fondement et qu'elle verra tomber pièce à pièce ce grand échafaudage qu'on avait élevé contre moi. J'espère faire partager mon opinion aux géomètres qui voudront examiner avec soin la question qui agite actuellement. Le résumé que je présente aujourd'hui à l'Académie est accompagné en note de quelques développements analytiques qui en faciliteront l'intelligence aux lecteurs.

» Les objections de M. Liouville sont de deux sortes. Il repousse d'abord mes droits à la résolution des équations dont il s'agit, et il s'efforce ensuite de prouver que mes démonstrations sont incomplètes et erronées. Je vais examiner séparément ces deux points.

» Les géomètres, a dit M. Liouville, dans la séance du 14 août, n'admettront *jamais* la réclamation de M. Libri. A la séance suivante, M. Liouville a ajouté que la résolution des équations qui forment l'objet de la discussion actuelle était attribuée à Abel par *tout le monde*. Arrêtons-nous un instant à ce début.

» En présence d'une assertion aussi positive, on devrait penser que M. Liouville s'est donné la peine de rechercher avec soin tout ce qui a été écrit sur ce sujet; qu'en tout cas il n'a pu échapper à ses investigations que l'opinion de quelque obscur écrivain, caché dans un coin reculé du monde. Mais il n'en est pas ainsi: mes droits ont été reconnus depuis longtemps à Paris et à Berlin, par deux savants, M. Lacroix et M. Crelle, auxquels leur science, leur position et leur caractère donnaient le droit et les moyens de porter un jugement juste et impartial. Dans la sixième édition de son *Complément des Éléments d'Algèbre*, M. Lacroix expose sommairement le but des travaux d'Abel et des miens sur le point en discussion, et il reconnaît l'antériorité de mes recherches. Dans cet ouvrage, notre vénérable et si regrettable confrère cite les Mémoires d'Abel, et prononce en toute connaissance de cause. L'avis ainsi motivé de M. Lacroix, si bon juge, homme d'un caractère si loyal et si honorable, me semble devoir être d'un grand poids aux yeux de l'Académie. Peut-être cependant, dans les circonstances actuelles, on pourrait attacher encore plus de prix à l'opinion de M. Crelle, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, qui en insérant en 1833, dans son excellent *Journal de Mathématiques*, un Mémoire où je faisais valoir mes droits à la résolution des équations d'où dépend la division de la lemniscate, reconnaissait positivement l'antériorité de mes travaux. Pour que M. Crelle, qui a été l'ami affectueux et dévoué d'Abel, qui a été l'éditeur empressé de ses travaux, pût déclarer, comme il l'a fait franchement, que dans les objets dont il s'agit *la priorité des idées m'appartient*, il fallait que mes droits fussent incontestables. Ce n'est pas que M. Crelle ait abandonné son ami pour cela; car il a ajouté « qu'il avait la conviction la plus intime (ce sont ses propres » expressions), fondée sur la connaissance détaillée des travaux de M. Abel, » que celui-ci n'a pas eu la moindre connaissance des travaux *antérieurs* » de M. Libri sur le même sujet (1). » Voilà la noble et loyale déclaration que M. Crelle a publiée spontanément à cet égard. Ne cherchant que la vérité, et voulant écarter toute question personnelle, le savant prussien a oublié

---

(1) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Zehnter band, p. 168.

qu'Abel appartenait à la grande famille allemande et qu'il était son ami, et il n'a pas hésité à reconnaître les droits d'un étranger.

» Après avoir montré, par ces faits, l'inexactitude de l'assertion de M. Liouville, affirmant que *tout le monde* était d'accord contre moi; après lui avoir opposé l'autorité de M. Lacroix et de M. Crelle, je pourrais considérer ce point comme suffisamment éclairci et passer outre: cependant, pour ne rien laisser en arrière, je dois discuter la valeur de certains témoignages que M. Liouville a cru pouvoir m'opposer. Dans sa dernière communication à l'Académie, il a avancé que M. Poisson et M. Jacobi s'étaient déclarés contre moi. Certes, si ces deux illustres géomètres avaient, comme l'ont fait Lacroix et M. Crelle, comparé les travaux d'Abel avec les miens, et si, après avoir cité et discuté nos titres respectifs, ils avaient prononcé contre moi, leur autorité pourrait m'être opposée avec succès; mais ils n'ont rien fait de pareil. L'écrit de M. Poisson auquel M. Liouville fait allusion a été présenté à l'Académie le 21 décembre 1829, tandis que le Mémoire de 1825 (1), dans lequel j'indiquais la manière de résoudre les équations dont il s'agit, n'a paru dans le *Recueil des Savants étrangers* que treize ans plus tard. Lorsque M. Poisson présenta à l'Académie le travail qu'on a cité, je n'étais plus en France: cet illustre géomètre n'avait donc aucun moyen de connaître un Mémoire que j'avais laissé en partant entre les mains des Commissaires chargés par l'Académie de l'examiner, et qui était resté depuis dans les archives de l'Institut. Je dois ajouter que lorsque, étant de retour à Paris, en 1830, je présentai à l'Académie un Mémoire détaillé où j'établissais mes droits, M. Poisson n'insista pas, ne fit aucune objection, et qu'il parut même attacher quelque prix à la méthode que je proposais dans ce Mémoire pour résoudre les anciennes équations trouvées par Fagnani, et auxquelles je venais de donner une nouvelle forme, afin de suppléer, pour le cas de la lemniscate, aux belles formules qu'Abel a trouvées.

» On le voit donc, M. Poisson n'a pas jugé contradictoirement; il ne connaissait pas mon travail, et dès que j'ai voulu établir mes droits, il n'a pas insisté. D'ailleurs, et c'est là le point essentiel, ce géomètre célèbre ne dit nulle part qu'Abel ait résolu le premier l'équation dont il s'agit; il se borne à parler des travaux de l'illustre analyste de Christiania sur cette matière, et

(1) M. Liouville a dit qu'en 1825, *je n'avais rien donné*, et cependant il venait de citer la Note présentée en 1825 à l'Académie, et dans laquelle j'énonçais ma proposition en montrant comment il fallait l'établir. (*Voyez* le *Compte rendu* du 21 août 1843, p. 330 et 332.)

il en fait ressortir l'importance, sans entrer dans aucune discussion historique à cet égard. Son autorité ne saurait donc pas m'être opposée, non plus que celle d'autres géomètres qui se trouveraient dans le même cas.

» Quant à M. Jacobi, il faut remarquer d'abord que ce profond géomètre n'a pas non plus émis un avis motivé. Il parle des travaux d'Abel sans rien dire des miens; et quoique, suivant toute apparence, il ait eu connaissance de mon Mémoire de 1830, publié à Berlin en 1833, rien ne prouve qu'il ait voulu repousser mes droits. En effet, ce qui semble le frapper le plus dans ce travail d'Abel, et ce qu'il lui importait surtout de signaler dans le passage auquel on fait allusion, c'est une certaine analyse particulière qui appartient certainement à Abel, mais qui n'est nullement en discussion. Peut-être ne doit-on voir dans ce passage de M. Jacobi qu'une citation générale comme on en rencontre souvent dans tous les auteurs, sans que d'ailleurs ces citations puissent jamais nuire aux droits du premier inventeur. J'ajouterai à cet égard que M. Jacobi, n'ayant rien opposé depuis aux observations que j'avais publiées dans les *Comptes rendus* au sujet de sa citation, n'a fourni aucune preuve d'où l'on puisse déduire qu'il persiste dans son opinion.

» Ainsi il est d'abord prouvé que lorsque M. Liouville a annoncé que tous les géomètres avaient prononcé contre moi, il a avancé un fait erroné. M. Lacroix et M. Crelle, jugeant contradictoirement, ont reconnu mes droits; et quant aux autres savants qu'on a cités, ou ils ont écrit sans pouvoir connaître mes travaux, ou bien ils n'ont pas persisté lorsque j'ai réclamé.

» Après avoir tenté d'établir que tous les géomètres avaient jugé en faveur d'Abel contre moi, M. Liouville s'efforce de prouver que ce que j'ai fait n'a aucune valeur, et que la démonstration du théorème que j'ai trouvée était connue d'*avance*. J'avoue que je ne comprends pas bien cette expression. Dans les sciences il n'y a de connu d'avance que ce qui a été prouvé, ou du moins énoncé d'une manière claire et précise. Si l'on admettait que les conséquences qui découlent, avec plus ou moins de facilité, de vérités déjà établies, sont *connues d'avance*, il en résulterait que, comme nécessairement toute vérité nouvelle s'appuie sur des vérités connues, le mérite des inventions disparaîtrait, et qu'un savant n'aurait qu'à se croiser les bras et à laisser travailler les autres, se contentant, à chaque pas en avant que d'autres feraient, de rechercher les liaisons qui rattachent une proposition nouvelle aux vérités déjà connues, et de dire, comme M. Liouville: C'était connu d'avance! En général, M. Liouville paraît trop disposé à déprécier les inventions des autres, surtout lorsqu'elles peuvent découler facilement de principes connus. On se rappelle qu'il accueillit avec un sentiment marqué de dédain un théorème remarqua-

ble que M. Jacobi avait adressé à l'Académie, et cela seulement parce que la démonstration de ce théorème ne lui semblait pas assez difficile : comme si la difficulté et non pas l'importance était le mérite principal d'un théorème ! Les hommes qui réfléchissent sur la manière dont se font les découvertes dans les sciences, et qui observent philosophiquement la marche de l'esprit humain, savent que toute découverte est due à l'application d'une méthode à un problème. Il est rare que la méthode et le problème soient nouveaux à la fois : tantôt c'est une méthode perfectionnée ou tout à fait nouvelle qui est appliquée à un problème déjà connu, tantôt c'est une méthode déjà ancienne, qui, modifiée convenablement, est appliquée à un problème nouveau. Pour me servir d'une figure fort simple, je dirai que, dans les sciences, quand on veut avancer, on se trouve à chaque instant arrêté par des portes fermées, dont quelques-unes sont visibles à tout le monde, mais dont le plus grand nombre est caché aux yeux du vulgaire. Tout savant est pourvu d'un trousseau de clefs et des instruments nécessaires pour en fabriquer d'autres; chacun essaye les clefs, mais peu de portes s'ouvrent. Ces essais sont renouvelés mille fois par jour. Pour faire un pas en avant, il faut ouvrir une porte; et pour cela, ou il faut ouvrir une porte connue avec une clef nouvelle, ou bien découvrir une nouvelle porte et l'ouvrir. Tout le monde comprend que les portes qu'on doit ouvrir sont les problèmes à résoudre, et que les clefs qu'on doit essayer ou fabriquer sont les méthodes nécessaires pour découvrir ou pour établir de nouvelles vérités. Dès que la porte est ouverte d'une manière quelconque, la foule s'y précipite, et trouve d'ordinaire que l'entrée en était fort aisée.

» Dans le cas actuel, comment M. Liouville s'y prend-il pour tâcher de prouver que mon théorème était, comme il dit, *connu d'avance?* Rapportant, à cet effet, la démonstration donnée par Lagrange et simplifiée dans l'énoncé par un de nos plus savants confrères, pour prouver qu'on peut toujours résoudre l'équation à deux termes, il annonce que cette démonstration s'applique aux équations plus générales que j'ai résolues le premier. M. Liouville ne fait ainsi que répéter ce que j'avais établi depuis longtemps; car, dans la Note présentée en 1825 à l'Académie, je disais, en propres termes, qu'on pouvait effectuer la résolution de ces équations en employant les mêmes principes « dont Lagrange s'est servi, dans les Notes de la deuxième édition de la » *Résolution des équations numériques*, pour résoudre les équations à deux » termes. » Si M. Liouville eût considéré ce passage, il est permis de croire qu'il se serait épargné la peine d'accumuler les preuves pour montrer la vérité d'une généralisation que j'avais établie il y a dix-huit ans. Mais de ce que la démonstration est analogue dans les deux cas, s'ensuit-il que ma pro-

position fût connue d'avance? Nullement. M. Gauss, qui avait donné le premier la méthode propre à la résolution des équations à deux termes, n'avait rien ajouté relativement à la forme et aux propriétés générales des racines des équations auxquelles il annonçait pouvoir appliquer ses principes. Ce grand géomètre possédait certainement la méthode générale, mais il avait voulu la cacher. C'était dans la détermination de la relation générale qui doit exister entre deux racines que consistait la difficulté : sans exprimer généralement une telle relation, il était impossible d'avancer. Or, cette généralisation était-elle aussi simple que paraît le croire M. Liouville? Pourquoi alors Lagrange, qui a repris les recherches de M. Gauss, ne l'a-t-il pas donnée? Pourquoi un autre profond géomètre (1), qu'on a voulu mêler, sans nécessité, à cette discussion, n'a-t-il pas énoncé le théorème d'une manière générale? Notre savant confrère, qui a répandu tant de clarté sur la théorie des équations, a-t-il jamais dit quelque part que la théorie de M. Gauss, ou que la démonstration de Lagrange pussent s'étendre aux équations dont toutes les racines étaient liées entre elles par une même relation rationnelle quelconque? Je ne connais aucun passage où cela soit même indiqué, et je trouve, au contraire, que partout où il a dû reprendre ce sujet, il a eu bien soin d'établir (comme il l'avait fait d'abord) que ces principes s'appliquent aux équations binômes et à celles qui en dépendent. Quant à des équations plus générales, il n'en a jamais été question.

» M. Liouville s'efforce de m'opposer l'autorité d'Abel, qui, dit-il, dans ses recherches, *rapporte à M. Gauss... la proposition* dont il s'agit. Ici mon adversaire fait une confusion, sans doute involontaire, mais qu'il aurait pu facilement éviter. Abel ne parle nullement de la proposition de M. Gauss, qui, voulant se réserver la propriété de ses belles découvertes, n'avait énoncé aucune proposition générale, ni sur la forme des racines, ni sur la nature des équations qu'il annonçait pouvoir résoudre. Dans son Mémoire, l'illustre géomètre de Christiania annonce que *sa méthode s'accorde au fond avec celle dont M. Gauss a fait usage* (2) pour la résolution de l'équation à deux

---

(1) Dans le courant de cette discussion, M. Poinsot a cru devoir intervenir personnellement pour faire valoir ses droits. Je me vois dans l'obligation de renouveler ici la déclaration que j'ai faite à la séance, savoir, qu'ayant cherché vainement dans les écrits de mon illustre confrère un passage sur lequel il pût établir sa réclamation, je demandais qu'on voulût bien m'indiquer précisément un tel passage. Comme on n'a pu répondre à ma demande, jusqu'à ce qu'un passage de cette nature me soit montré, je serai malheureusement forcé de persister dans mon opinion.

(2) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Zehnter band, p. 131.

termes. Par ces paroles, Abel n'a nullement *rapporté* à M. Gauss la proposition dont il s'agit; il a seulement montré qu'il l'avait établie par une méthode analogue à celle de M. Gauss, de même que j'avais prouvé qu'on pouvait la démontrer par les principes posés par Lagrange. Au reste, en exposant, dans l'introduction de son Mémoire, l'objet de ses recherches, Abel a été beaucoup plus explicite. Au lieu de rapporter à d'autres géomètres la proposition dont il s'agit, Abel l'annonce comme une généralisation qui lui est propre (1).

« Les équations algébriques, dit-il, ne sont pas résolubles généralement,
» mais il y a une classe particulière d'équations de tous les degrés, dont la
» résolution algébrique est possible. Telles sont, par exemple, les équations
» *à deux termes*. La résolution de ces équations est fondée sur certaines re-
» lations qui existent entre les racines. J'ai *essayé de généraliser* cette re-
» marque en supposant que deux racines d'une équation donnée soient telle-
» ment liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par
» l'autre; et j'ai *trouvé* (2) qu'une telle équation peut toujours être résolue à
» l'aide d'équations moins élevées Il y a même des cas où l'on peut résoudre
» algébriquement l'équation donnée elle-même.... La même chose a lieu
» encore si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées (ration-
» nellement de la même manière les unes par les autres). »

» Voilà donc Abel disant qu'après avoir *essayé de généraliser la méthode de M. Gauss*, il *a trouvé* ce que M. Liouville croit avoir été connu d'*avance* par tout le monde. Si l'assertion de mon adversaire était vraie, elle tendrait évidemment à rabaisser le mérite éminent du géomètre norwégien : heureusement elle est inexacte. Sans avoir aucune connaissance de mes recherches (3), Abel a retrouvé ce que M. Gauss avait annoncé, et cette conformité

---

(1) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Vierter band, p. 131.

(2) C'est en disant qu'il a *essayé de généraliser* et qu'il *a trouvé*, qu'Abel a probablement suggéré l'idée à M. Liouville d'avancer que ce même Abel *n'affiche aucune prétention d'inventeur*. (*Comptes rendus*, séance du 21 août 1843, p. 332.)

(3) Je n'ai jamais cessé de déclarer qu'Abel, lorsqu'il produisait ses admirables travaux, ne connaissait nullement les recherches que j'avais présentées à l'Académie sur ce sujet. Afin qu'on ne puisse jamais se méprendre sur mes intentions, je demanderai la permission de reproduire ici un passage de mon Mémoire de 1830. Je disais dans ce Mémoire :

« L'illustre Abel, dont les géomètres regretteront toujours la mort prématurée, publia en
» 1829 un travail très-remarquable sur une classe d'équations résolubles algébriquement; mais
» il périt avant d'avoir pu appliquer son analyse aux belles formules qu'il avait déjà données
» pour la multiplication des fonctions elliptiques. Il est inutile de dire qu'Abel ne connaissait
» pas les recherches que j'avais faites précédemment sur le même sujet. Son génie n'avait pas
» besoin de connaître les idées des autres pour faire des découvertes. D'ailleurs la diver-

de travaux et de résultats, sur un objet spécial, est si flatteuse pour moi, que je ne saurais négliger de la rappeler. Il suffirait de montrer qu'Abel a cru ce sujet digne de ses investigations pour en prouver l'importance. Mais il n'est pas inutile d'ajouter que cette généralisation, que M. Liouville trouve si simple et si vulgaire, et qu'à son avis tout le monde connaissait *d'avance*, a mérité l'honneur d'être exposée et longuement commentée, pour des cas fort élémentaires, dans la dernière édition de la *Théorie des nombres* de M. Legendre, qui a consacré une section entière de son savant ouvrage à l'exposition d'une proposition dont il a bien montré par là l'importance et la nouveauté. Nous venons de voir à quoi se réduisent les arguments de M. Liouville, relativement à l'historique de la question. Je vais examiner actuellement les remarques critiques que mon adversaire a présentées contre l'exactitude de ma démonstration ; et les géomètres reconnaîtront, je l'espère, qu'elles n'ont aucun fondement.

» Il y a deux manières, en mathématiques, de traiter un sujet : l'une, tout élémentaire et destinée à des écoliers ; l'autre, plus élevée et qui convient uniquement à cette enceinte. La rigueur des démonstrations doit être toujours la même, quel que soit l'auditoire auquel on s'adresse ; mais les développements sont différents, et lorsqu'on présente un Mémoire à l'Institut de France, on doit, pour l'honneur de ce grand corps, passer les détails et les explications élémentaires, et ne s'arrêter qu'aux choses essentielles. C'est ce que je fis lorsqu'en 1830 j'eus l'honneur de lire devant à l'Académie mon *Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné*, etc., Mémoire qui était le développement de la Note que j'avais déjà présentée en 1825. Je pensai alors avec raison que les géomètres devant lesquels j'avais l'honneur de parler possédaient à fond la matière que je traitais, et que, tout en m'appliquant à conserver la rigueur des démonstrations, je devais m'abstenir de leur rappeler des principes élémentaires et connus. Une épreuve, que j'ai eu l'occasion de faire depuis, m'a prouvé que je n'avais pas hérissé de trop de difficultés mon Mémoire, et que des lecteurs bien moins exercés pouvaient le comprendre sans faire de grands efforts. Lorsque j'avais l'honneur de suppléer M. Lacroix au Collége de France, je m'appliquais à varier tous les ans le sujet de mes Leçons. Une année, je voulus traiter de la théorie des équations, et naturellement je fus conduit à donner l'analyse du Mémoire que M. Liouville a si sévèrement censuré. On

---

» sité de nos méthodes montre assez que nous avons travaillé indépendamment l'un de l'au-
» tre. » (Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Zehnter band, p. 168 et 169.)

me fit des objections qui, en grande partie, s'accordaient avec celles qu'a présentées mon adversaire. Après avoir donné quelques indications utiles, j'engageai les personnes qui me faisaient l'honneur de m'exposer leurs doutes à réfléchir de nouveau, leur promettant d'ailleurs d'éclaircir toutes ces difficultés, s'il en restait encore, à la conférence suivante. Mais ce jour-là mes explications devinrent inutiles; avec un peu de réflexion, tout le monde avait compris. Ce sont ces mêmes difficultés que M. Liouville a présentées de nouveau, en les qualifiant d'*erreurs graves* et d'*assertions hasardées*. Avant de réfuter ces critiques, je ferai remarquer que, lors même que mes démonstrations seraient incomplètes, et que quelque cas échapperait à mon analyse, il ne s'ensuivrait pas qu'elles dussent nécessairement être rejetées, surtout par M. Liouville qui, dans ses écrits, s'est bien gardé de montrer la même rigueur qu'il exige aujourd'hui de moi. Je trouve en effet, dans plusieurs travaux de M. Liouville, des phrases comme celles-ci : « Toutes les formules dont je me » sers dans ce Mémoire sont assujetties à des restrictions... sur lesquelles je » n'ai pas cru devoir insister : la manière dont on les démontre indique » assez quand et comment elles sont exactes. » Dans un autre Mémoire du même auteur, je lis ce qui suit : « Nous avons passé sous silence... les ex- » ceptions auxquelles nos règles sont assujetties. Il suffit que le lecteur en soit » averti une fois pour toutes (1). »

» Lorsqu'on a fait de telles déclarations, on ne devrait pas se montrer trop difficile en fait de rigueur géométrique; et je pourrais ici répondre à mon critique dans les mêmes termes : S'il y a des exceptions à mes propositions, si mes formules ne sont pas toujours exactes, ce n'est pas mon affaire; lisez les démonstrations et vous distinguerez vous-même l'erreur de la vérité. Mais, à mon avis, ce serait là une réponse fort incomplète. Si M. Liouville a reconnu que dans ses travaux le faux et le vrai se succèdent rapidement, ce n'est pas une raison pour que je puisse accepter le reproche qu'il m'adresse aujourd'hui d'avoir mêlé l'erreur à la vérité. Les travaux de M. Liouville, auxquels je fais allusion ici, ont été d'ailleurs trop sévèrement critiqués par de savants géomètres, pour que je puisse me permettre d'imiter sa manière de procéder. Sans chercher donc à m'excuser par son exemple, je dirai, et j'espère le prouver, que les erreurs que M. Liouville m'attribue ne sont que des choses qu'il ne s'est pas donné la peine de comprendre, et que s'il y a des erreurs, elles sont toutes de son côté.

» M. Liouville me reproche d'abord d'avoir imposé au théorème une

---

(1) *Voyez* deux Mémoires de M. Liouville, insérés dans le xxe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 8 et 88.

restriction inutile, en opérant sur une équation qui n'a pas de facteurs rationnels. La Note présentée à l'Académie en 1825 porte que : *l'on pourra encore résoudre complètement l'équation...* (*lorsqu'elle n'a pas de facteurs rationnels*) *en employant la même méthode dont Lagrange s'est servi*, etc. La restriction porte donc sur ma démonstration et non pas sur l'énoncé de la proposition; elle devait subsister dans le cas actuel. Je voulais d'ailleurs énoncer un théorème nouveau, et je n'avais pas besoin de comprendre dans mon énoncé un cas connu de tous les commençants. M. Liouville ne me semble pas s'être bien rendu compte de la nature de l'équation dont il s'agit, lorsqu'elle a des facteurs rationnels. Car alors, si tous les facteurs rationnels sont égaux, on aura un certain nombre d'équations égales sans facteurs rationnels, et cela ne nous apprendra rien de nouveau, et ne nous fera connaître aucune autre racine nouvelle; et, si tous les facteurs ne sont pas égaux, les racines de l'équation seront rationnelles et pourront être déterminées par les méthodes les plus élémentaires et qui sont connues depuis longtemps. Je n'avais donc nullement à me préoccuper de ces cas-là; mon énoncé est parfaitement exact, et il n'y a rien à changer quand on veut dire quelque chose de nouveau. Ce qui montre encore mieux l'opportunité de n'y introduire aucune modification, c'est l'erreur dans laquelle est tombé M. Liouville, en s'efforçant de les généraliser (1) à sa manière. En effet, en l'énonçant, comme il le prétend, plus *correctement*, M. Liouville dit que l'équation dont il s'agit sera nécessairement résoluble à l'aide de *radicaux*, qu'il y ait oui ou non des facteurs rationnels. Or nous venons de voir que si tous les facteurs rationnels ne sont pas égaux, les racines seront toutes rationnelles : il n'y aura donc pas de *radicaux*. M. Liouville me permettra donc de conserver mon énoncé plus restreint, et de ne pas adopter celui qu'il y a substitué et qui est erroné.

» Passant à l'examen de mon lemme, M. Liouville déclare que *personne n'adoptera ma démonstration*, et il me demande si lorsque je cherche à déterminer chaque puissance d'une racine en fonction linéaire des autres racines, je crois pouvoir établir que ces équations ne *rentrent* pas les unes dans les autres? A mon avis il y a ici une étrange confusion d'idées, et il me serait facile de répondre à ce passage de l'article de M. Liouville, où mon

---

(1) Il est évident aussi que si toutes les racines pouvaient s'exprimer ainsi r, $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, ..., $\varphi_n(r)$, sans que (pour me servir d'une expression de M. Liouville) le *cercle* fût fermé, l'équation serait également résoluble. Mais ces sortes de généralisations n'ont pas besoin d'être énoncées : tout le monde les devine.

adversaire dit : « Il n'est donc pas prouvé que les puissances d'une même ra-
» cine puissent toujours s'exprimer par des fonctions linéaires des autres
» racines. J'ajoute qu'on peut aisément former des exemples où le contraire
» a lieu. » Mais j'attendrai les exemples que promet M. Liouville, et pour le moment je me bornerai à faire remarquer que dans la dernière édition de la *Théorie des nombres*, M. Legendre, abordant quelques points de cette démonstration par une méthode analogue à la mienne, admet la vérité du lemme tant critiqué par M. Liouville (1). Si mon adversaire avait pris la peine de considérer l'analyse de M. Legendre, il m'aurait probablement épargné la critique qu'il m'a adressée à ce sujet, et il aurait ainsi évité les méprises dans lesquelles il est tombé.

» Après avoir prouvé que l'énoncé que j'ai choisi est exact, après avoir démontré que ma démonstration est exacte aussi, et que les erreurs et les méprises appartiennent toutes à M. Liouville, il me reste à examiner ce que M. Liouville dit relativement à ma manière de diviser en parties égales l'arc de la lemniscate. Si M. Liouville avait examiné les équations que je donne dans mon Mémoire et qui ne sauraient appartenir qu'au périmètre entier (2), il ne m'aurait pas demandé de *quelles équations* je voulais parler. Lorsque je m'appliquai d'abord à résoudre le problème si difficile proposé par M. Gauss en 1801, et resté toujours sans solution, je dus nécessairement étudier les travaux de Fagnani et d'Euler sur la lemniscate. La résolution des équations que je rencontrai dans leurs écrits, et qu'Euler n'avait pas résolues, m'offrit d'abord des difficultés insurmontables, et ce fut seulement lorsqu'au lieu de chercher, comme on l'avait fait, la division du demi-périmètre, je considérai le périmètre entier, que je pus former cette série rentrante des racines qui m'appartient et qui devait me conduire au but. Je m'efforçai alors de résoudre les équations pour le cas où la division de la lemniscate pouvait s'effectuer par la règle et le compas, et j'y parvins par les moyens qui m'avaient réussi déjà pour le cercle. C'est là ce que je disais dans mon Mémoire de 1825; il est facile de montrer en effet comment les mêmes principes s'appliquent aux équations relatives à la lemniscate. Plus tard, je repris ce sujet, et j'annonçai dans un Mémoire imprimé à Florence, que je pouvais résoudre les mêmes équations à l'aide des principes de l'analyse indéterminée. La proposition que j'avais présentée en 1825 à l'Académie, en indiquant les moyens de la démontrer, renfermait ces deux procédés et les

(1) *Voyez* LEGENDRE, *Théorie des nombres*, Paris, 1830; 2 vol. in-4°, t. II, p. 461 et 462.

(2) Pour éviter toute équivoque, je dirai que j'entends par *périmètre entier* l'une des deux parties égales et fermées qui composent la courbe totale.

généralisait; mais il me manquait toujours de pouvoir trouver des équations analogues et jouissant des mêmes propriétés pour la division de la lemniscate en un nombre quelconque de parties. C'est pour cela que j'ai hésité si longtemps à publier les recherches dont j'avais présenté les éléments à l'Académie. Maintenant, M. Liouville déclare que je n'ai pas démontré que les équations relatives à la lemniscate peuvent se résoudre par les principes que j'avais posés. M. Liouville est encore ici dans l'erreur : l'analyse de l'équation relative à la division de la lemniscate en cinq parties montre, comme je l'ai annoncé (1) dans le Mémoire de 1830, la manière de procéder dans tous les cas. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du cas le plus simple, de celui dans lequel on peut diviser la lemniscate par la règle et le compas seulement. En ce cas, qui est le plus remarquable, et celui que je devais avoir spécialement en vue, le nombre des équations que j'ai donné sera pair (2) ; et en faisant un certain nombre d'éliminations successives, on réduira toujours ces équations à deux seulement, qui seront réciproques et analogues en tout point à celles qui servent à la division en cinq parties égales (3). Dans tous les cas, il sera facile, par les principes les plus élémentaires de la théorie des équations de séparer des autres les racines qui ont entre elles un rapport donné (4). Dans l'introduction de mon Mémoire, j'ai indiqué rapidement quelques-unes des propriétés des racines des divers facteurs dans lesquels peut se décomposer, dans certains cas, l'équation finale. Tout homme qui a quelque habitude de l'algèbre comprendra facilement ce que j'ai dit à cet égard dans mon Mémoire. Si M. Liouville pouvait conserver encore quelques doutes sur ce point si élémentaire, je m'engagerais à les lever. Mais je ne pense pas qu'il puisse être arrêté plus longtemps par des difficultés de cet ordre-là.

» Je viens de réfuter toutes les objections de M. Liouville. D'autres points incidents, pour lesquels l'emploi de l'analyse me paraissait nécessaire, sont

---

(1) « En général on voit comment on peut appliquer les mêmes principes aux équa- » tions qui donnent la division de la lemniscate en $2^n + 1$ parties égales. « (Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Zehnter band, p. 172.)

(2) Excepté pourtant pour la division en trois parties égales qui s'effectue d'ailleurs immédiatement.

(3) Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Zehnter band, p. 171.

(4) Dans son article, M. Liouville dit : « Pour pouvoir appliquer le théorème de la » Note IV, il aurait fallu, je le répète, montrer que la *totalité* des racines de l'équation à » résoudre peut être comprise dans un groupe unique x, $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, . . . , $\varphi_{\mu-1}(x)$; or c'est » ce que M. Libri ne fait pas, et *pour cause*. » On voit que la cause de cette omission est fort légère, puisque les facteurs que l'on cherche se déterminent avec la plus grande facilité.

discutés dans les notes (1). J'espère que les géomètres ne conserveront plus aucun doute, et je suis convaincu que M. Liouville lui-même, s'il veut étudier avec soin la question, reconnaîtra l'exactitude rigoureuse de mon analyse, et comprendra qu'il s'est trompé. En attendant, afin qu'on puisse bien saisir l'ensemble de mes idées, je donnerai, en terminant, le résumé et les conclusions de ma réponse.

» 1°. Il est inexact de dire, comme l'a avancé M. Liouville, que tous les géomètres aient repoussé mes droits. M. Lacroix et M. Crelle ont reconnu positivement l'antériorité de mes recherches. D'autres analystes ont parlé des travaux d'Abel sans se prononcer, ou n'ont pas jugé contradictoirement.

» 2°. Il est également inexact que la proposition contenue dans la Note présentée par moi à l'Académie en 1825 fût déjà connue des géomètres, et qu'Abel l'ait déclaré; il est prouvé au contraire, par des citations rigoureuses, que cette proposition était nouvelle, et qu'Abel, qui ne connaissait pas mes recherches, a tenu à constater la nouveauté des résultats auxquels il était parvenu de son côté.

» 3°. L'énoncé que j'ai donné de ma proposition est exact : la restriction ne porte que sur la démonstration que j'avais employée et non pas sur le théorème. En complétant, comme il l'a cru, cet énoncé, M. Liouville n'y a ajouté que des cas connus de tout le monde, et il y a introduit une erreur en affirmant que la résolution aura lieu nécessairement par les radicaux. Dans la plupart des cas qu'il a eu spécialement en vue, toutes les racines seront rationnelles et n'admettront aucun radical.

» 4°. M. Liouville s'est trompé lorsqu'il a avancé que ma démonstration

---

(1) M. Liouville me reproche d'avoir dit dans mon Mémoire : « L'analyse précédente nous » montre comment on peut résoudre les équations qui résultent de l'élimination des inconnues » entre les deux équations $\varphi(x,y)=0$, $\varphi(y,x)=0$. » Et il ajoute : « Il est juste de dire » qu'en parlant des équations $\varphi(x,y)=0$, $\varphi(y,x)=0$, l'auteur n'a en vue de traiter l'équa- » tion finale en x qu'après l'avoir préalablement débarrassée du facteur rationnel $\varphi(x,x)$, » qui exprimerait tous les polynômes possibles. Mais l'équation restante sera encore telle que » M. Libri ne peut avoir la prétention de la résoudre dans tous les cas. J'en déduirais, par » exemple, l'équation trinôme à laquelle un géomètre anglais, dont le nom m'échappe, est » parvenu à réduire l'équation générale du cinquième degré. » Ici M. Liouville m'attribue gratuitement une erreur pour se donner le plaisir de la réfuter victorieusement. Puisque M. Liouville avait compris que je ne voulais pas résoudre l'équation $\varphi(x,x)=0$, quoique cela ne résulte que de l'ensemble de mon analyse sans être dit expressément nulle part, pourquoi a-t-il, contrairement à mon intention, supposé que la fonction $\varphi(x,y)$ était quelconque, bien que j'aie exprimé formellement le contraire, en ajoutant immédiatement après le passage cité : « Nous avons supposé dans tout ce qui précède que la fonction φ ou φ_1 qui exprime le rapport » entre deux racines est une fonction *entière* ? » Est-ce que si la forme de la fonction était

devait être rejetée comme reposant sur un lemme inexact : le lemme est vrai et la démonstration est rigoureuse. M. Liouville est tombé dans des erreurs graves lorsqu'il a voulu critiquer ce lemme.

» 5°. En affirmant que je n'avais pas prouvé que les équations relatives à la lemniscate doivent être rangées, pour les cas que j'avais considérés, dans la classe des équations qui se résolvent toujours par des radicaux, M. Liouville a montré que dans l'équation finale il ne pouvait pas séparer des autres racines celles qui ont entre elles un rapport rationnel donné, quoique ce soit là une question des plus simples et des plus élémentaires de l'algèbre.

» 6°. Enfin, mon adversaire a montré dans ses critiques qu'il ne s'était pas suffisamment appliqué à la théorie des équations, théorie qu'il faut connaître à fond lorsqu'on veut discuter des questions aussi délicates. S'il l'avait fait, comme on était en droit de l'attendre de lui, il se serait épargné la peine de proclamer qu'il y avait de graves erreurs là où il n'aurait dû rencontrer que des difficultés élémentaires. »

Réponse de M. Liouville.

« L'Académie pense bien que je n'ai nullement envie de répondre en détail aux assertions inexactes de toute nature dont la Note de M. Libri est remplie. La plupart (même celles qu'on a revêtues d'une forme prétendue mathématique) tombent au-dessous de toute réfutation. D'autres pourraient au plus tromper ceux qui n'ont pas suivi ces débats. Est-il nécessaire, par exemple, de faire observer à des confrères qui m'ont entendu, qu'à aucune époque de la discussion mes opinions n'ont été ni n'ont pu être modifiées ; que je n'ai pas cessé un instant d'être d'accord avec moi-même en m'exprimant de vive voix ou en écrivant dans le *Compte rendu ?* Ce que j'ai dit,

---

quelconque dans l'équation $\varphi(x,y)=0$, le rapport de deux racines serait une fonction entière ? M. Liouville combat ici une opinion qui n'est pas la mienne. J'ajouterai que, sans recourir à des auteurs anglais dont on a oublié le nom, tout le monde doit savoir qu'en admettant la possibilité de résoudre sous leur forme la plus générale les deux équations simultanées $\varphi(x,y)=0$, $\varphi(y,x)=0$, [même en négligeant le facteur $\varphi(x,x)$], on parviendrait à résoudre les équations de tous les degrés. Pourquoi M. Liouville a-t-il dit qu'il déduirait de l'*équation restante* la résolution d'une équation trinôme relative au cinquième degré, et n'a-t-il pas vu tout de suite que la résolution générale des équations se déduirait de la proposition sans aucune restriction qu'il m'attribue mal à propos? Je terminerai cette Note en faisant remarquer qu'en disant dans son article que j'ai appliqué aux fonctions irrationnelles des opérations qui n'ont de sens que pour des fonctions rationnelles, M. Liouville semble oublier que ma proposition s'applique, dans un grand nombre de cas, à des fonctions irrationnelles. J'espère bientôt présenter à l'Académie un travail spécial sur ce sujet.

ce que j'ai imprimé sur les personnes et sur les choses, je le maintiens encore aujourd'hui.

» Je ne reviendrai pas sur le théorème relatif aux équations dont toutes les racines peuvent être engendrées successivement, à partir d'une quelconque d'entre elles, par une seule et même opération rationnelle, théorème dont j'ai rétabli l'énoncé correct que M. Libri avait gâté. M. Poinsot interviendra sans doute dans cette partie de la discussion, et ma faible parole n'ajouterait rien à l'autorité de la sienne (*). Quant au lemme dont M. Libri a, je ne sais pourquoi, cru devoir faire usage dans la démonstration, savoir, que les puissances d'une des racines de la proposée peuvent toujours s'exprimer en fonction linéaire des autres racines (**), je me contenterai de prouver, par un exemple pris entre mille, qu'il est inexact. L'équation

$$(1) \qquad x^4 + 4x^2 + 2 = 0,$$

dont les racines sont comprises dans la formule

$$\pm \sqrt{-2 \pm \sqrt{2}},$$

n'a évidemment pas de facteurs rationnels. De plus, x étant une de ses racines, les autres sont

$$x_1 = x + \frac{2}{x}, \quad x_2 = x_1 + \frac{2}{x_1} = -x,$$
$$x_3 = x_2 + \frac{2}{x_2} = -\left(x + \frac{2}{x}\right) = -x_1;$$

de sorte qu'elles naissent successivement d'une seule, comme on le demande. En continuant, on retomberait sur la racine x; car

$$x_3 + \frac{2}{x_3} = -\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = x.$$

» D'après M. Libri, le carré x^2 devrait s'exprimer sous forme linéaire, à l'aide des racines x_1, x_2, x_3; on devrait donc avoir

$$x^2 = ax + b\left(x + \frac{2}{x}\right) + c,$$

a, b, c étant rationnels. Or, de là résulterait une équation du troisième degré en x, ce qui est absurde, l'équation (1) étant irréductible. En augmentant toutes les racines de l'équation (1) d'une unité, on en aura une autre qui

---

(*) M. Poinsot a pris en effet la parole et a confirmé, de la manière la plus positive, tout ce que j'avais dit à ce sujet.

(**) Il est indifférent de dire *toutes les racines* ou simplement *les autres racines*, puisque la somme des racines est connue.

pourrait aussi servir d'exemple, et dans laquelle les puissances impaires de l'inconnue ne manqueront pas(*).

» Maintenant, M. Libri, en partant du théorème cité, a-t-il donné, dans son Mémoire de 1830, le moyen de résoudre les équations de Fagnani pour la division de la lemniscate? Je persiste à répondre: non. Les détails d'algèbre que M. Libri réserve pour l'impression, et que je ne connais pas, ne pourront empêcher qu'il n'ait confondu dans des raisonnements vagues, et les équations de la lemniscate, et une foule d'autres équations non résolubles par radicaux.

» Après avoir posé les équations de Fagnani,

$$z_1^4 = \frac{16 z_2^4 (1 - z_2^4)^2}{(1 + z_2^4)^4}, \quad z_2^4 = \frac{16 z_3^4 (1 - z_3^4)^2}{(1 + z_3^4)^4}, \quad \ldots, \quad z_n^4 = \frac{16 z_1^4 (1 - z_1^4)^2}{(1 + z_1^4)^4},$$

qu'on peut écrire plus simplement (en faisant $z_1^4 = x_1$, $z_2^4 = x_2$, etc.)

$$x_1 = \frac{16 x_2 (1 - x_2)^2}{(1 + x_2)^4}, \quad x_2 = \frac{16 x_3 (1 - x_3)^2}{(1 + x_3)^4}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{16 x_1 (1 - x_1)^2}{(1 + x_1)^4},$$

M. Libri se sert-il des propriétés particulières, intimes, de la fonction

$$\varphi(x) = \frac{16x(1 - x)^2}{(1 + x)^4}$$

qui y figure? Non. Il passe de suite aux généralités. Or, que dans les équations

$$x_1 = \varphi(x_2), \quad x_2 = \varphi(x_3), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi(x_1),$$

on prenne pour $\varphi(x)$ une fonction rationnelle, je ne dis pas quelconque, mais un tant soit peu différente (ne fût-ce que par des coefficients numériques) de celle qui convient à la lemniscate, et bien vite on sera conduit à des équations dont la plupart se refuseront, sans aucun doute, à une solution par radicaux.

» Des équations

$$x_1 = \varphi(x_2), \quad x_2 = \varphi(x_3), \ldots, \quad x_n = \varphi(x_1),$$

on tire par l'élimination

$$\text{(A)} \qquad \varphi_n(x_1) = x_1,$$

(*) Dans les cas indiqués, les équations posées par M. Libri, à la page 177 du tome X du Journal de M. Crelle, ne suffiront pas pour déterminer les inconnues. Elles rentreront, comme je l'ai dit, les unes dans les autres en vertu de relations linéaires existant entre les racines, sans que pour cela la proposée admette des facteurs rationnels.

où φ_n indique une opération répétée n fois. De l'équation (A) on pourra chasser les racines qui satisfont à $\varphi(x_1)=x_1$, et même à $\varphi_i(x_1)=x_1$, i étant diviseur de n. Cela fait, les racines restantes seront telles qu'une d'entre elles x_1 en fournira $(n-1)$ autres, $\varphi(x_1)$, $\varphi_2(x_1)$,..., $\varphi_{n-1}(x_1)$; en continuant, on retomberait sur la racine x_1 puisque $\varphi_n(x_1)=x_1$. Si la proposée était de degré n seulement, ses racines seraient toutes comprises dans le groupe unique x_1, $\varphi(x_1)$,..., $\varphi_{n-1}(x_1)$, et l'équation se résoudrait sur-le-champ. Mais il n'en est point ainsi. Une racine x'_1 étrangère au premier groupe en fournira donc un second distinct du premier, et on continuera de manière à épuiser toutes les racines. De là plusieurs groupes de n racines chacun. Soit μ le nombre de ces groupes, $n\mu$ le degré de l'équation qui les renferme tous. Les méthodes connues permettront de faire dépendre les racines d'un même groupe d'une équation de degré n facile à résoudre, mais pour cela il faudra se servir d'une équation auxiliaire de degré μ. Or, cette équation auxiliaire, comment la résoudra-t-on dès qu'on aura $\mu > 4$, ce qui arrivera (en prenant n suffisamment grand), et dans le cas général d'une fonction φ quelconque, et dans le cas particulier de la lemniscate? Dans ce dernier cas nous savons sans doute que l'équation de degré μ (si élevé que devienne ce degré) peut se résoudre aussi, mais nous le savons par le travail d'Abel (*) et non par celui de M. Libri.

» Au point de vue où M. Libri s'est placé dans le Mémoire de 1830, il n'a le droit de rien affirmer sur cette équation de degré μ. Rien ne peut lui apprendre comment les racines y sont liées entre elles. Là est le nœud de la difficulté devant laquelle échoue sa méthode.

» Je me crois donc autorisé à conclure de nouveau que M. Libri n'a donné ni en 1825, ni même en 1830, après Abel, le moyen de résoudre par radicaux les équations de Fagnani. Laissons donc là ce Mémoire de 1830, qui, scientifiquement parlant, ne mérite pas en vérité qu'on s'en occupe.

» A la suite d'une discussion où l'on a tant parlé d'équations algébriques, j'espère intéresser l'Académie en lui annonçant que dans les papiers d'Évariste Galois (**), j'ai trouvé une solution aussi exacte que profonde de ce

---

(*) C'est surtout à la connaissance de l'expression transcendante des racines des équations à résoudre (expression qu'il obtient d'abord par la considération des deux périodes des fonctions elliptiques), qu'Abel doit d'avoir réussi dans la recherche de leur expression purement algébrique.

(**) Ces manuscrits m'ont été confiés par M. Auguste Chevalier. Galois observe en passant qu'on peut toujours faire dépendre la résolution d'une équation algébrique donnée de celle d'une équation auxiliaire telle que deux de ses racines, prises au hasard, s'expriment ra-

beau problème : « Étant donnée une équation irréductible de degré premier, » décider si elle est ou non résoluble à l'aide de radicaux. » Le Mémoire de Galois est rédigé peut-être d'une manière un peu trop concise. Je me propose de le compléter par un commentaire qui ne laissera, je crois, aucun doute sur la réalité de la belle découverte de notre ingénieux et infortuné compatriote. »

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur l'emploi des équations symboliques dans le calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies ; par* **M. A. Cauchy.**

« Le second volume de mes *Exercices de Mathématiques* renferme un article sur l'analogie des puissances et des différences dans lequel, après avoir rappelé les travaux remarquables de M. Brisson, relatifs à cet objet, j'ai spécialement examiné l'emploi que l'on peut faire des caractéristiques D et Δ dans l'intégration des équations linéaires aux différences finies ou infiniment petites, mêlées ou non mêlées, et à coefficients constants. Parmi les formules que j'ai, dans cet article, établies et démontrées en toute rigueur, celles qui se rapportent aux équations linéaires différentielles ou aux dérivées partielles se trouvaient déjà dans le Mémoire de M. Brisson. D'ailleurs, il suffit d'appliquer la notation du calcul des résidus aux diverses formules que j'avais obtenues pour en déduire les intégrales générales des équations linéaires et à coefficients constants, aux différences finies ou infiniment petites, sous la forme d'expressions symboliques très-simples, et pour retrouver ainsi la formule que j'ai donnée dans le volume déjà cité, page 213, ou les résultats du même genre donnés à Rome par M. l'abbé Tortolini.

» Les formules que j'avais démontrées dans l'article ci-dessus mentionné renferment seulement des fonctions rationnelles des lettres caractéristiques D et Δ. Ces formules sont généralement vraies, et subsistent dans tous les cas possibles. Mais on ne saurait en dire autant des formules auxquelles on parvient lorsqu'on développe ces fonctions en séries composées d'un nombre infini de termes, comme l'avait proposé M. Brisson, ou lorsqu'on fait entrer

tionnellement la première par la seconde, et la seconde par la première, à volonté. Mais l'existence de ces rapports entre les racines de l'équation auxiliaire ne rend pas celle-ci résoluble, en général, par radicaux, sans quoi l'on résoudrait toutes les équations algébriques. Cette remarque servira à éclairer mieux encore, s'il est possible, la discussion précédente.

avec cet auteur, et avec Poisson, les lettres caractéristiques sous des signes d'intégration. Il était important d'examiner sous quelles conditions subsistent de telles formules, qui sont quelquefois exactes et quelquefois inexactes. Or, je suis parvenu à reconnaître qu'il y a heureusement un moyen simple et facile de résoudre généralement cette question. Le moyen dont il s'agit consiste à substituer les valeurs trouvées pour les inconnues dans les équations auxquelles ces inconnues doivent satisfaire, et à examiner si ces équations sont ou ne sont pas vérifiées, en ayant soin d'assujettir les séries introduites dans le calcul à demeurer toujours convergentes. C'est ainsi que j'ai obtenu diverses formules que j'indiquerai ci-après. Parmi ces formules, il en est une surtout qui me paraît digne de remarque, savoir, celle qui sert à transformer une intégrale aux différences finies en une série d'intégrales aux différences infiniment petites.

ANALYSE.

» Soient

$$\square,\ \nabla$$

deux fonctions entières des lettres caractéristiques

$$\mathrm{D},\ \Delta,$$

ou plus généralement des lettres caractéristiques

$$\mathrm{D}_x,\ \mathrm{D}_y,\ \mathrm{D}_z, \ldots,\ \Delta_x,\ \Delta_y,\ \Delta_z, \ldots,$$

qui indiquent des fonctions dérivées et des différences finies relatives à diverses variables x, y, z.... Supposons d'ailleurs que,

$$\square_{\prime},\ \square_{\prime\prime}, \ldots,\ \nabla_{\prime},\ \nabla_{\prime\prime}, \ldots,$$

désignant d'autres fonctions entières des mêmes lettres caractéristiques, et $\nabla_{\prime}$, $\nabla_{\prime\prime}$,... étant des diviseurs de la fonction ∇, l'on ait

$$(1) \qquad \frac{\square}{\nabla} = \frac{\square_{\prime}}{\nabla_{\prime}} + \frac{\square_{\prime\prime}}{\nabla_{\prime\prime}} + \ldots,$$

dans le cas où l'on considère ces lettres caractéristiques comme de véritables quantités. Enfin, soit

$$(2) \qquad \mathrm{K} = f(x,\ y,\ z, \ldots)$$

une fonction quelconque des variables x, y, z,.... On sera naturellement

porté à croire que l'équation (1) entraîne la suivante

$$\frac{\Box}{\nabla}K = \frac{\Box_{,}}{\nabla_{,}}K + \frac{\Box_{,,}}{\nabla_{,,}}K + \ldots, \tag{3}$$

dans laquelle les notations

$$\frac{\Box}{\nabla}K, \quad \frac{\Box_{,}}{\nabla_{,}}K, \quad \frac{\Box_{,,}}{\nabla_{,,}}K, \ldots,$$

représentent les valeurs de

$$\varpi, \ \varpi_{,}, \ \varpi_{,,}, \ldots$$

propres à vérifier les équations aux différences finies ou infiniment petites

$$\nabla\varpi = \Box K, \tag{4}$$

$$\nabla_{,}\varpi_{,} = \Box_{,}K, \quad \nabla_{,,}\varpi_{,,} = \Box_{,,}K, \text{ etc.}\ldots \tag{5}$$

Or, pour décider si la formule (3) est exacte ou inexacte, il suffira d'examiner si l'on vérifie ou non l'équation (4) en prenant

$$\varpi = \varpi_{,} + \varpi_{,,} + \ldots. \tag{6}$$

Cela posé, concevons d'abord que les termes compris dans le second membre de la formule (3) soient en nombre fini. On tirera de cette formule

$$\Box = \frac{\nabla}{\nabla_{,}}\Box_{,} + \frac{\nabla}{\nabla_{,,}}\Box_{,,} + \ldots, \tag{7}$$

et par suite

$$\Box K = \frac{\nabla}{\nabla_{,}}\Box_{,}K + \frac{\nabla}{\nabla_{,,}}\Box_{,,}K + \ldots, \tag{8}$$

puis, eu égard aux équations (5),

$$\Box K = \nabla\varpi_{,} + \nabla\varpi_{,,} + \ldots, \tag{9}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\nabla(\varpi + \varpi_{,} + \ldots) = \Box K. \tag{10}$$

Donc alors la valeur de ϖ donnée par la formule (6) vérifiera l'équation (4), comme nous l'avons reconnu dans le second volume des *Exercices de Mathématiques*.

» Lorsque $\frac{\square}{\nabla}$ se réduit à une fraction rationnelle de la seule caractéristique D ou Δ, on peut, à l'aide du calcul des résidus, décomposer immédiatement cette fraction rationnelle en fractions simples, et obtenir ainsi une équation de la nature de l'équation (1). En effet, soient $f(x)$, $F(x)$ deux fonctions entières de n; et supposons, pour plus de commodité, le degré de la première fonction inférieur à celui de la seconde. On aura généralement

(11) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \mathcal{E}\,\frac{1}{x-r}\left(\frac{f(r)}{F(r)}\right).$$

Or, si dans la formule (11) on remplace successivement la variable x par les caractéristiques D et Δ considérées comme propres à indiquer une dérivée à une différence relative à cette même variable, on obtiendra deux formules analogues à la formule (1); et les équations correspondantes qui se présenteront à la place de l'équation (3) seront

(12) $$\frac{f(D)}{F(D)}\,K = \mathcal{E}\,\frac{K}{D-r}\left(\frac{f(r)}{F(r)}\right),$$

(13) $$\frac{f(\Delta)}{F(\Delta)}\,K = \mathcal{E}\,\frac{K}{\Delta-r}\left(\frac{f(r)}{F(r)}\right).$$

D'ailleurs

$$\frac{K}{D-r} \quad \text{et} \quad \frac{K}{\Delta-r}$$

représenteront les deux valeurs de ϖ propres à vérifier les deux équations linéaires

$$(D-r)\varpi = K, \quad (\Delta-r)\varpi = K;$$

de sorte qu'en posant, pour abréger, $\Delta x = h$, on trouvera

$$\frac{K}{D-r} = e^{rx}\int e^{-rx}K\,dx, \qquad \frac{K}{\Delta-r} = (1+r)^{\frac{x}{h}-1}\sum(1+r)^{-\frac{x}{h}}K.$$

Donc les formules (12), (13) donneront

(14) $$\frac{f(D)}{F(D)}\,K = \mathcal{E}\left(\frac{f(r)}{F(r)}\right)e^{rx}\int e^{-rx}K\,dx,$$

(15) $$\frac{f(\Delta)}{F(\Delta)}\,K = \mathcal{E}\left(\frac{f(r)}{F(r)}\right)(1+r)^{\frac{x}{h}-1}\sum(1+r)^{-\frac{x}{h}}K.$$

Donc on vérifiera l'équation différentielle

(16) $$\mathrm{F}(\mathrm{D})\varpi = \mathrm{f}(\mathrm{D})\mathrm{K}$$

en posant

(17) $$\varpi = \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{f}(r)}{\mathrm{F}(r)}\right) e^{rx}\int e^{-rx}\mathrm{K}\,dx,$$

et l'équation aux différences finies

(18) $$\mathrm{F}(\Delta)\varpi = \mathrm{f}(\Delta)\mathrm{K}$$

en posant

(19) $$\varpi = \mathcal{E}\left(\frac{\mathrm{f}(r)}{\mathrm{F}(r)}\right)(1+r)^{\frac{x}{h}-1}\sum(1+r)^{-\frac{x}{h}}\mathrm{K}.$$

Si, dans les formules (17), (19) on réduit la fonction $\mathrm{f}(r)$ à l'unité, on retrouvera les deux équations symboliques qui ont été données, l'une par moi-même dans le second volume des *Exercices de Mathématiques*, page 213, l'autre par M. l'abbé Tortolini, comme propres à représenter l'intégrale générale d'une équation différentielle ou aux différences finies, linéaire et à coefficients constants.

» Supposons, pour fixer les idées, qu'en posant $\mathrm{f}(r) = 1$ et $\mathrm{K} = f(x)$, on assujettisse l'inconnue ϖ de l'équation

(20) $$\mathrm{F}(\mathrm{D})\varpi = f(x)$$

à s'évanouir avec ses dérivées d'un ordre inférieur au degré n de la fonction $\mathrm{F}(r)$, pour $x = \mathrm{x}$, x étant une valeur particulière de la variable x; alors on tirera de l'équation (19)

$$\varpi = \mathcal{E}\left(\frac{1}{\mathrm{F}(r)}\right) e^{rx}\int_{\mathrm{x}}^{x} e^{-rx} f(x)\,dx,$$

ou, ce qui revient au même,

(21) $$\varpi = \mathcal{E}\left(\frac{1}{\mathrm{F}(r)}\right)\int_{\mathrm{x}}^{x} e^{r(x-z)} f(z)\,dz.$$

» Pareillement, si l'on assujettit l'inconnue ϖ de l'équation

(22) $$\mathrm{F}(\Delta)\varpi = f(x)$$

à s'évanouir avec les différences finies d'un ordre inférieur au degré n de la fonction $F(r)$, pour $x = \mathrm{x}$, on tirera de la formule (19)

$$(23) \qquad \varpi = \mathcal{E}\left(\frac{1}{F(r)}\right)\sum_{z=\mathrm{x}}^{z=x}(1+r)^{\frac{x-z}{h}-1} f(z).$$

» Les formules (21), (23) fournissent le moyen de transformer en intégrales simples les intégrales multiples aux différences finies ou infiniment petites, dans lesquelles toutes les intégrales se rapportent à une seule variable. En effet, si l'on pose $F(r) = r^n$, les valeurs de ϖ propres à vérifier les équations

$$D^n\varpi = 0, \quad \Delta^n\varpi = 0,$$

et représentées par les intégrales multiples

$$\int_{\mathrm{x}}^{x}\int_{\mathrm{x}}^{x}\ldots f(x)\,dx^n, \quad \sum_{\mathrm{x}}^{x}\sum_{\mathrm{x}}^{x}\ldots f(x),$$

seront ce que deviennent les seconds membres des formules (21), (23) quand on y pose $F(r) = r^n$. On aura donc

$$(24) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{x}\int_{\mathrm{x}}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f(z)dz,$$

et

$$(25) \qquad \sum_{\mathrm{x}}^{x}\sum_{\mathrm{x}}^{x}\ldots f(x) = \sum_{z=\mathrm{x}}^{z=x}\frac{(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}\,.\,h)}{1.2.3\ldots(n-1)}(1+r)^{\frac{x-z}{h}-1}f(z).$$

La première des deux formules précédentes étant déjà connue, la seconde s'accorde avec l'une de celles que j'ai données dans le second volume des *Exercices de Mathématiques*, page 183.

» Parmi les formules que l'on peut déduire de l'équation (3), nous citerons encore la suivante

$$(26) \qquad \frac{K}{D^n F\left(\frac{\Delta}{D}\right)} = \mathcal{E}\,\frac{K}{\Delta - rD}\,\frac{1}{D^{n-1}}\left(\frac{1}{F(r)}\right),$$

qui est analogue aux formules (12), (13), et qui ramène l'intégration de

l'équation aux différences mêlées

$$D^n F\left(\frac{\Delta}{D}\right)\varpi = K,$$

dans laquelle n désigne le degré de la fonction $F(r)$, à l'intégration de l'équation du premier ordre

$$(\Delta - rD)\varpi = K.$$

Nous citerons encore la formule

$$\frac{K}{D_x^n F\left(\frac{D_t}{D_x}\right)} = \mathcal{E}\, \frac{K}{D_t - rD_x}\, \frac{1}{D_x^{n-1}}\, \left(\frac{1}{F(r)}\right). \tag{27}$$

Cette dernière formule, donnée par M. l'abbé Tortolini, pourrait se déduire immédiatement, à l'aide d'un simple changement de notation, d'une formule établie dans le second volume des *Exercices de Mathématiques*, page 190, et ramène l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$D_x^n F\left(\frac{D_t}{D_x}\right)\varpi = K$$

à celle de l'équation du premier ordre

$$(D_x - rD_y)\varpi = K.$$

» Il est essentiel d'observer que si l'on décompose en facteurs la fraction rationnelle $\frac{\square}{\nabla}$, dans l'expression

$$\frac{\square}{\nabla}K,$$

qui forme le premier membre de l'équation (3), l'ordre des facteurs pourra être interverti arbitrairement sans que la valeur de cette expression soit altérée. On aura, par exemple,

$$\frac{D}{\Delta}K = D\left(\frac{K}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta}(DK),$$

et, en conséquence,

$$D\,\Sigma K = \Sigma\, DK. \tag{28}$$

On trouvera de même, en désignant par $f(D)$ une fonction entière de D,

$$f(D)\,\Sigma K = \Sigma f(D) K. \tag{29}$$

Il y a plus; on pourra, dans l'équation (28) ou (29), supposer les différentiations qu'indique la lettre D relatives à une variable distincte de celle à laquelle se rapporte l'intégration indiquée par la lettre Σ. Cela posé, il résulte de la formule (28) qu'on peut généralement différentier sous le signe Σ, comme on différentie sous le signe $\int$.

» Si dans la formule (29) on prend

$$K = e^{ax},$$

alors, en supposant le signe Σ relatif à x, le signe D relatif à la lettre a, et en laissant d'abord de côté la fonction périodique dans ΣK, on trouvera

$$f(D) K = f(x) e^{ax}, \qquad \Sigma K = \frac{e^{ax}}{e^{ah}-1}.$$

Donc la formule (29) donnera

$$\Sigma f(x) e^{ax} = f(D) \frac{e^{ax}}{e^{ah}-1} + \Pi(x), \tag{30}$$

$\Pi(x)$ étant une fonction périodique de x, c'est-à-dire une fonction assujettie à vérifier la formule

$$\Delta \Pi(x) = 0.$$

L'équation (5) paraît digne de remarque, et prouve qu'en nommant $f(x)$ une fonction entière de x, on peut toujours obtenir en termes finis l'intégrale

$$\Sigma f(x) e^{ax},$$

de laquelle on déduit immédiatement cette autre intégrale

$$\Sigma f(x),$$

en posant dans la première $a = 0$.

» Si l'on suppose la valeur numérique du produit ah inférieure à 2π, on aura

$$\frac{1}{e^{ah}-1} = \frac{1}{ah} - \frac{1}{2} + \frac{c_1}{2} ah - \frac{c_2}{2.3.4} a^3 h^3 + \ldots, \tag{31}$$

c_1, c_2,..., étant les nombres de Bernoulli. Donc alors, en ayant égard à la formule

$$f(D_a)\,a^n e^{ax} = f(D_a)\,D_x^n e^{ax} = D_x^n f(x)\,e^{ax},$$

qui subsiste pour des valeurs entières positives ou négatives de n, et en écrivant K au lieu du produit $e^{ax} f(x)$, on trouvera

$$(32)\quad \sum K = \frac{1}{h}\int K\,dx - \frac{1}{2}K + \frac{c_1}{2}hD_xK - \frac{c_2}{2.3.4}h^2 D_x^3 K + \ldots + \Pi(x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33)\qquad \sum K = \frac{K}{e^{hD_x} - 1} + \Pi(x).$$

» La formule (32) ou (33), qui est celle de Maclaurin, pourrait être obtenue par induction à l'aide des équations symboliques

$$1 + \Delta = e^{hD_x},$$

$$\sum = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{e^{hD_x} - 1}.$$

Dans le cas où l'on suppose la fonction K de la forme $e^{ax} f(x)$, la formule (33), d'après ce qu'on vient de dire, subsiste seulement pour les valeurs de h qui vérifient la condition

$$(34)\qquad \text{mod. } ah < 2\pi.$$

» Nous reviendrons, dans un autre article, sur les conditions de convergence de la formule de Maclaurin, et nous montrerons aussi le parti qu'on peut tirer des formules (3), (12),..., et autres du même genre, quand le nombre de termes renfermés dans le second membre devient infini. Nous nous bornerons, pour l'instant, à observer que si, dans l'équation (12), on pose

$$\frac{f(D)}{F(D)} = \frac{1}{e^{hD} - 1} = \frac{1}{\Delta},$$

on en déduira immédiatement une formule nouvelle qui nous paraît digne

d'être remarquée, savoir,

$$(35)\left\{\begin{aligned}&\sum f(x) = \Pi(x) - \tfrac{1}{2} f(x) - \int_0^{\frac{\text{x}-x}{h}} f(x+ht)\,dt \\ &\quad - 2\int_0^{\frac{\text{x}-x}{h}} f(x+ht)\cos(2\pi t)\,dt - 2\int_0^{\frac{\text{x}-x}{h}} f(x+ht)\cos(4\pi t)\,dt \ldots,\end{aligned}\right.$$

x étant une valeur particulière de la variable x.

» L'exactitude de cette formule peut d'ailleurs être vérifiée directement à l'aide d'équations déjà connues. »

M. Arago dépose sur le bureau le Journal du laboratoire de Lavoisier, afin que la Commission nommée par l'Académie y puise ce qu'elle trouvera propre à figurer dans l'édition projetée des Œuvres de ce célèbre chimiste.

MÉMOIRES LUS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur l'intégration d'une équation différentielle à l'aide des différentielles à indices quelconques; par* M. J.-A. Serret.

I.

« On rencontre à chaque pas dans les questions de physique mathématique, et spécialement dans la théorie de la chaleur, une équation différentielle à laquelle on peut toujours ramener l'équation célèbre de Riccati, et dont plusieurs géomètres se sont occupés avec soin.

» Cette équation est la suivante,

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - my = 0,$$

dans laquelle m et n représentent des constantes réelles et d'ailleurs quelconques.

» On sait que si n est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale complète de cette équation peut être obtenue sous forme finie; mais on n'a

pas encore, même dans ce cas, donné à cette intégrale la forme si simple et si élégante qu'elle est susceptible de prendre.

» Je me propose d'appliquer à cette équation les principes dont M. Liouville a enrichi l'analyse dans ses beaux Mémoires sur le calcul des différentielles à indices quelconques (*). Ces principes fournissent de suite l'intégrale complète de l'équation (1) sous une forme qu'il serait, je crois, impossible de découvrir autrement. On trouvera ainsi une vérification nouvelle de cette phrase du célèbre auteur de la méthode : « Ces expressions » (les dérivées à indices quelconques), dont il est aisé de fixer avec clarté le » sens véritable, ne sont pas seulement curieuses à étudier sous le rapport » mathématique et purement spéculatif. Leur représentation existe dans la » nature, et l'on peut citer des questions de géométrie et de physique où » leur usage est amené sans effort et paraît même indispensable (**). »

» Dans le Mémoire inséré au XXI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 163, M. Liouville a montré le premier comment on pouvait appliquer avec fruit le calcul des différentielles à indices quelconques, à l'intégration des équations différentielles. Sa méthode consiste à regarder la fonction que l'on cherche comme la dérivée à indice quelconque d'une fonction plus simple, et à profiter de l'indétermination de cet indice pour simplifier l'équation transformée. Cette méthode réussit dans un grand nombre de cas; mais dans beaucoup d'autres, avant de l'appliquer, il est nécessaire de faire subir aux équations des transformations convenables. On verra, dans ce qui va suivre, en quoi consistent ces transformations. Toutefois, avant d'entrer dans l'exposition de la méthode, je dirai en peu de mots comment j'ai été conduit à cette recherche.

II.

» Désignons par y la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$; M. Catalan et moi (***), nous sommes parvenus par des voies différentes à montrer que cette intégrale peut être obtenue sous forme finie lorsque n est un nombre entier, et j'ai fait voir, en outre, que la formule donnée par M. Catalan a encore lieu pour les valeurs fractionnaires de n.

» La méthode suivie par M. Catalan repose sur ce que y satisfait à une

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XX[e] et XXI[e] cahiers.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, XXI[e] cahier, p. 2.

(***) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, p. 110; t. VIII, p. 20.

équation différentielle linéaire de l'ordre $2(n+1)$, ce qui suppose nécessairement n entier; je vais montrer que, quel que soit n, y satisfait toujours à une équation linéaire du deuxième ordre.

» L'intégration par parties donne

$$\int \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x(1+\alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x} \int \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{2(n+1)}{x} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

ou

$$yx = 2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha;$$

différentiant deux fois par rapport à x, on a

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+2}} \alpha^3 d\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = -2(n+1) \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha.$$

or

$$-\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\frac{d^2(yx)}{dx^2} - yx = 2(n+1)\frac{dy}{dx},$$

ou bien

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{2}$$

équation qui coïnciderait avec (1) si l'on y changeait n en $-n$, et x en $x\sqrt{m}$.

» Rien n'est plus simple que de déterminer l'intégrale complète de l'équation (2) et, par suite, la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, en supposant n entier et positif.

» Si l'on pose

$$y = z e^{\mu x},$$

μ étant l'une des racines carrées de l'unité, l'équation (2) devient

$$x\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx}\right) - 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0. \tag{3}$$

Intégrons cette équation par la méthode des coefficients indéterminés, et soit, s'il est possible,

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots$$

La substitution de cette valeur de z dans l'équation (3) fournit la relation suivante entre les coefficients a_{p+1} et a_p de deux termes consécutifs quelconques :

$$(4) \qquad (p+1)(2n-p)a_{p+1} = -2\mu(n-p)a_p.$$

Cette relation fera connaître les rapports des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au premier a_0, lequel est tout à fait arbitraire; elle montre en outre que les coefficients $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n-1}$ sont nuls, et que le suivant a_{2n} est arbitraire; elle donnera enfin les rapports de tous les autres à ce dernier.

» Il résulte de là que, n étant entier, l'intégrale complète de l'équation (3) sera

$$z = \frac{A}{a_0}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + \frac{A'}{a_{2n}}(a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1}) + \ldots \text{ etc.},$$

A et A′ étant deux constantes arbitraires, et $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ des constantes déterminées et déduites de l'équation (4). La première partie de cette valeur de z est seule composée d'un nombre limité de termes.

» On voit enfin que l'on obtiendra une intégrale particulière de l'équation (2) en posant

$$y = \frac{A}{a_0} e^{\mu x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

formule dans laquelle μ a l'une des valeurs $+1$ ou -1.

» L'intégrale générale sera donc

$$y = \frac{A}{a_0} e^{-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + \frac{B}{a_0} e^{x}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots \pm a_n x^n),$$

A et B étant deux constantes arbitraires et les rapports $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots$ devant satisfaire l'équation générale

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = 2\frac{n-p}{(p+1)(2n-p)}.$$

On déduit aisément de là la valeur du terme général $\frac{a_p}{a_0}$, savoir,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{2^p}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{2n.(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+1)},$$

ou, en représentant par $\Gamma(q)$ le produit des $(q-1)$ premiers nombres entiers,

$$\frac{a_p}{a_0} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} 2^p \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)}.$$

On aura ainsi pour l'intégrale complète de l'équation (2),

$$y = \mathrm{A}e^{-x}\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(v+1)}(2x)^p + \mathrm{B}e^x\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-p+1)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p+1)}(-2x)^p,$$

en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{\mathrm{A}\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$, $\frac{\mathrm{B}\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}$.

» Il est aisé de déduire de là la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha$, mais je ne m'arrêterai pas à cette recherche, ayant voulu seulement faire voir que cette intégrale ne dépendait que d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre.

III.

» La méthode qui vient d'être exposée revient, en dernière analyse, à intégrer l'équation (2) supposée dépourvue du terme en $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$y = \mathrm{C}e^{-x} + \mathrm{C}'e^x,$$

puis à faire varier les constantes C et C', de manière à obtenir l'intégrale complète de l'équation (2).

» C'est cette même marche que je vais suivre dans la recherche de l'intégrale générale de l'équation (1), dans laquelle je supposerai les constantes m et n tout à fait quelconques.

IV.

» Si l'on pose, comme précédemment,

$$y = ze^{\mu x},$$

elle devient

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx} + \mu^2 z\right) + \frac{2n}{x}\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) - mz = 0,$$

et en déterminant μ par l'équation $\mu^2 - m = 0$,

$$(5) \qquad x\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\mu\frac{dz}{dx}\right) + 2n\left(\frac{dz}{dx} + \mu z\right) = 0.$$

Il est clair qu'il suffira de connaître une intégrale particulière de l'équation (5) pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (1) [*].

» Si l'on pose

$$z = \frac{d^p\theta}{dx^p},$$

p étant une quantité quelconque à laquelle nous attribuerons plus tard une valeur particulière, l'équation (5) devient

$$(6) \qquad x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} + 2\mu x\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2n\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}} + 2\mu n\frac{d^p\theta}{dx^p} = 0.$$

Pour avoir l'intégrale à indice λ du premier membre de cette équation, nous nous servirons de la formule suivante, qui sert à intégrer le produit de deux facteurs (**):

$$\int^\lambda \varphi\varphi_1\, dx^\lambda = \varphi_1\int^\lambda \varphi dx^\lambda - \frac{\lambda}{1}\frac{d\varphi_1}{dx}\int^{\lambda+1}\varphi\, dx^{\lambda+1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\int^{\lambda+2}\varphi\, dx^{\lambda+2}\ldots$$

On voit que le nombre des termes du second membre sera limité toutes les fois que φ_1 sera une fonction rationnelle et entière.

» On aura donc

$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}}\, dx^{p+2} = x\frac{d\theta}{dx} - (p+1)\theta,$$

$$\int^{p+1} x\frac{d^{p+1}\theta}{dx^{p+1}}\, dx^{p+1} = x\theta - (p+1)\int\theta\, dx.$$

---

[*] En réalité, l'équation (5), en adoptant les deux valeurs de μ, donne lieu à deux équations différentielles distinctes, et il est nécessaire de connaître une intégrale particulière de chacune de ces équations. A. S.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIe cahier, p. 166.

D'après cela, l'intégrale à indice $(p+1)$ du premier membre de l'équation (6) sera

$$x\frac{d\theta}{dx}+2\mu x\theta+(2n-p-1)\theta+2\mu(n-p-1)\int\theta dx.$$

Si donc on désigne par ψ la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^{p+1}\psi}{dx^{p+1}}=0,$$

on aura

$$x\frac{d\theta}{dx}+2\mu x\theta+(2n-p-1)\theta+2\mu(n-p-1)\int\theta dx=\psi;$$

si l'on pose maintenant $p=n-1$, le terme $\int\theta dx$ disparaîtra, et l'équation en θ, réduite au premier ordre, deviendra

$$(7)\qquad x\frac{d\theta}{dx}+(2\mu x+n)\theta=\psi:$$

la fonction ψ satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n}=0,$$

et la valeur de z sera donnée en même temps que celle de θ, au moyen de la simple formule

$$z=\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}}.$$

La fonction complémentaire ψ est nulle si n est entier et négatif; elle renferme n constantes arbitraires si n est entier et positif; dans tout autre cas elle en renferme un nombre arbitraire, mais limité: au surplus, nous n'avons pas à nous occuper ici de cette question.

» La supposition de ψ nul dans l'équation (7) ne fera qu'altérer la généralité de la valeur de θ, mais cela importe peu, puisque nous n'avons besoin que d'une valeur particulière de z.

» Si donc on fait $\psi=0$, l'équation (7) devient

$$(8)\qquad x\frac{d\theta}{dx}+(2\mu x+n)\theta=0,$$

ou

$$\frac{d\theta}{\theta}+\left(2\mu+\frac{n}{x}\right)dx=0,$$

d'où

$$\theta = \mathrm{A}e^{-2\mu x}\,x^{-n},$$

A désignant une constante arbitraire.

» On aura donc une intégrale particulière de l'équation (5) en posant

(9) $$z = \mathrm{A}\,\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}\,x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

V.

» L'intégrale de l'équation (8) fait connaître de suite celle de l'équation (7) par la méthode de la variation des constantes; on trouve ainsi que la valeur la plus générale de θ qui satisfait à l'équation (7) ou à l'équation (6) est

(10) $$\theta = \mathrm{A}e^{-2\mu x}\,x^{-n} + e^{-2\mu x}\,x^{-n}\int e^{2\mu x}\,x^{n-1}\,\psi dx,$$

ψ étant, comme nous l'avons dit, la fonction la plus générale qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0;$$

si n est un nombre entier, la fonction ψ renferme n constantes arbitraires, et l'équation (10) donne pour θ une expression renfermant $n+1$ constantes arbitraires comme cela doit être.

VI.

» Il résulte de ce qui précède qu'on satisfera à l'équation (1) en posant

(11) $$y = \mathrm{A}e^{\mu x}\,\frac{d^{n-1}(e^{-2\mu x}\,x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

μ étant l'une des racines de l'équation

$$\mu^2 - m = 0;$$

l'intégrale générale sera donc

(12) $$y = \mathrm{A}e^{x\sqrt{m}}\,\frac{d^{n-1}(e^{-2x\sqrt{m}}x^{-n})}{dx^{n-1}} + \mathrm{B}\,e^{-x\sqrt{m}}\,\frac{d^{n-1}(e^{2x\sqrt{m}}x^{-n})}{dx^{n-1}},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

» Telle est la forme si simple sous laquelle se présente immédiatement la valeur générale de y, valeur que l'on pourra aisément calculer toutes les fois que n sera un nombre entier, mais qu'il importe autrement de savoir transformer.

» Nous allons examiner successivement les deux cas bien distincts qui peuvent se présenter.

VII.

» Supposons n positif et d'ailleurs quelconque ; on a

$$x^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-ux} u^{n-1} du,$$

$\Gamma(n)$ désignant, suivant l'habitude, l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du.$$

» D'après cela, l'équation (11) devient, en mettant simplement A au lieu de $\frac{A}{\Gamma(n)}$,

$$y = A e^{\mu x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^\infty e^{-(2\mu+u)x} u^{n-1} du;$$

or

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^\infty e^{-(2\mu+u)x} u^{n-1} du = (-1)^{n-1} \int_0^\infty e^{-(2\mu+u)x} u^{n-1} (2\mu+u)^{n-1} du,$$

donc

$$y = A e^{-\mu x} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u+2\mu)^{n-1} du. \tag{13}$$

Telle est l'équation qui dans le cas de n positif remplacera l'équation (11).

» On en déduit, pour l'intégrale générale de l'équation (1),

$$(14)\left\{\begin{aligned} y = A e^{-x\sqrt{m}} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u + 2\sqrt{m})^{n-1} du \\ + B e^{x\sqrt{m}} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-1} (u - 2\sqrt{m})^{n-1} du. \end{aligned}\right.$$

Si par exemple $n = 1$, on a de suite

$$y = \frac{A e^{-x\sqrt{m}} + B e^{x\sqrt{m}}}{x};$$

si $n=2$,

$$y = \mathrm{A}e^{-x}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{\sqrt{m}}{x^2}\right)+\mathrm{B}e^{x}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{\sqrt{m}}{x^2}\right),$$

valeurs qu'on peut aisément vérifier.

» On voit en général que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie si n est un nombre entier, et que dans aucun cas les intégrales définies de l'équation (14) ne deviendront infinies.

» On peut aisément vérifier à posteriori l'exactitude des résultats auxquels nous sommes parvenus.

» Si l'on pose

$$y=\int_{u_0}^{u_1} e^{-(\mu+u)x}u^{n-1}(u+2\mu)^{n-1}du,$$

u_0 et u_1 étant indépendants de x, et qu'on porte cette valeur dans l'équation (1), le résultat de la substitution donne de suite

$$e^{-(\mu+u_1)x}u_1^n(u_1+2\mu)^n - e^{-(\mu+u_0)x}u_0^n(u_0+2\mu)^n=0,$$

équation qui sera satisfaite si l'on fait

$$u_0=0 \quad \text{et} \quad u_1=\infty.$$

On satisfera encore à l'équation précédente en posant

$$u_0=0,\quad u_1+2\mu=0,$$

ou bien

$$u_0+2\mu=0,\quad \text{et} \quad u_1=\infty,$$

ce qui donnera pour valeur générale de y

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \mathrm{A}e^{-x\sqrt{m}}\int_0^{\infty} e^{-xu}u^{n-1}(u+2\sqrt{m})^{n-1}du \\ &+ \mathrm{B}\,e^{x\sqrt{m}}\int_0^{2\sqrt{m}} e^{-xu}u^{n-1}(2\sqrt{m}-u)^{n-1}du, \end{aligned}\right.$$

expression qui sera souvent plus commode que celle fournie par l'équation (14), et qui du reste peut être aisément déduite de cette dernière.

» Il est clair que l'équation (14) a lieu quelle que soit la constante m réelle ou imaginaire.

VIII.

» Avant d'examiner le cas de n négatif, il est nécessaire de rappeler une formule importante due à M. Liouville (*), et qui sert à transformer une intégrale à indice positif, mais quelconque, en intégrale définie.

» Cette formule est la suivante :

$$(16) \qquad \int^p \varphi(x)dx^p = \frac{1}{(-1)^p\Gamma(p)}\int_0^\infty \varphi(x+u)u^{p-1}du.$$

» L'exactitude de cette formule exige que la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x=\infty$, ou, en d'autres termes, que le développement de $\varphi(x)$ en série d'exponentielles $\sum A_a e^{ax}$ ne renferme que des exposants négatifs ou de la forme $\alpha+6\sqrt{-1}$, α étant une quantité négative.

» Il existe toutefois une formule analogue à la précédente et qui donne le moyen de transformer $\int^p \varphi(x)dx^p$, lorsque la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x=-\infty$, ou que son développement en série d'exponentielles ne renferme que des exposants positifs ou de la forme $\alpha+6\sqrt{-1}$, α étant une quantité positive.

» Soient donc

$$\varphi(x) = \sum A_a e^{ax}$$

et

$$X = \int_0^\infty \varphi(x-u)u^{p-1}du,$$

on aura

$$X = \int_0^\infty \sum A_a e^{a(x-u)}u^{p-1}du,$$

ou, en intégrant sous le signe $\sum$,

$$X = \sum A_a e^{ax}\int_0^\infty e^{-au}u^{p-1}du.$$

Or, a étant positif,

$$\int_0^\infty e^{-au}u^{p-1}du = \frac{\Gamma(p)}{a^p};$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXIe cahier, p. 8.

donc

$$X = \Gamma(p) \sum \frac{A_a e^{ax}}{a^p} = \Gamma(p) \int^p \varphi(x) dx^p;$$

et, en remettant au lieu de X sa valeur,

$$(17) \qquad \int^p \varphi(x) dx^p = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \varphi(x-u) u^{p-1} du.$$

Cette démonstration est à peu près la même que celle que M. Liouville a donnée de l'équation (16).

» Il ne faut pas oublier que les formules (16) et (17) n'ont lieu, la première, que si $\varphi(\infty) = 0$, et la deuxième, que si $\varphi(-\infty) = 0$.

IX.

» Examinons maintenant la forme de l'intégrale générale de l'équation (1) quand n est négatif. Si l'on change n en $-n$, les équations (1) et (11) deviennent

$$(1 \text{ bis}) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} - my = 0,$$

$$(11 \text{ bis}) \qquad y = Ae^{\mu x} \int^{n+1} e^{-2\mu x} x^n dx^{n+1}.$$

L'équation (11 *bis*) fait connaître deux intégrales particulières de l'équation (1 *bis*) correspondantes aux deux valeurs de μ, et par suite l'intégrale générale.

» Supposons m positif, et remplaçons successivement μ par $+\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$ dans l'équation (11 *bis*); on aura, pour l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*),

$$(18) \quad y = Ae^{x\sqrt{m}} \int^{n+1} e^{-2x\sqrt{m}} x^n dx^{n+1} + Be^{-x\sqrt{m}} \int^{n+1} e^{2x\sqrt{m}} x^n dx^{n+1},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

» Or, en vertu des formules (16) et (17), on a

$$\int^{n+1} e^{-2x\sqrt{m}} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-2(x+u)\sqrt{m}} (x+u)^n u^n du,$$

$$\int^{n+1} e^{2x\sqrt{m}} x^n dx^{n+1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{2(x-u)\sqrt{m}} (x-u)^n u^n du,$$

et l'équation (18) devient, en mettant simplement A et B au lieu de $\frac{A}{(-1)^{n+1}\Gamma(n+1)}$, $\frac{B}{\Gamma(n+1)}$,

$$(19) \quad y = Ae^{-x\sqrt{m}}\int_0^\infty e^{-2u\sqrt{m}}(x+u)^n u^n du + Be^{x\sqrt{m}}\int_0^\infty e^{-2u\sqrt{m}}(x-u)^n u^n du.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*) dans le cas de n positif. Les deux intégrales définies qui y entrent ne deviendront jamais infinies, même si m est négatif; mais il est évident que, dans ce cas, les formules (16) et (17) cessent d'avoir lieu, et l'équation (19) ne représente plus l'intégrale générale de l'équation (1 *bis*).

» Si $n = 1$, on trouve

$$y = Ae^{-x\sqrt{m}}(x\sqrt{m} + 1) + Be^{x\sqrt{m}}(x\sqrt{m} - 1);$$

si $n = 2$,

$$y = Ae^{-x\sqrt{m}}(mx^2 + 3x\sqrt{m} + 3) + Be^{x\sqrt{m}}(mx^2 - 3x\sqrt{m} + 3),$$

valeurs qu'il est aisé de vérifier directement.

» En général, on voit que la valeur de y s'obtiendra sous forme finie toutes les fois que n sera un nombre entier.

» La substitution dans l'équation (1 *bis*) de la valeur de y, fournie par l'équation (13), s'effectue très-simplement; mais cette vérification n'a lieu, ainsi que nous l'avons prévu, que si $\sqrt{m}$ est réel ou au moins de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α n'étant pas nul.

X.

» Il nous reste à montrer comment on obtiendra l'intégrale de l'équation (1 *bis*), dans laquelle on suppose m négatif.

» Si l'on y change m en $-m$, elle devient

$$(1\ ter) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + my = 0.$$

Or, si dans cette dernière on met $\frac{x}{\sqrt{-1}}$ au lieu de x, on obtient précisément l'équation (1 *bis*) que nous venons d'intégrer; on obtiendra donc l'intégrale complète de l'équation (1 *ter*) en mettant $x\sqrt{-1}$ au lieu de x dans

l'équation (19). Il vient ainsi

$$(20)\left\{\begin{aligned} y = {} & A e^{-x\sqrt{m}\sqrt{-1}} \int_0^\infty e^{-2u\sqrt{m}} (x\sqrt{-1}+u)^n u^n du \\ & + B e^{x\sqrt{m}\sqrt{-1}} \int_0^\infty e^{-2u\sqrt{m}} (x\sqrt{-1}-u)^n u^n du, \end{aligned}\right.$$

résultat qui, comme les précédents, est très-facile à vérifier à posteriori; on y parviendra, par exemple, en substituant dans l'équation

$$x\left(\frac{d^2z}{dx^2} - 2\sqrt{-m}\frac{dz}{dx}\right) + 2n\left(\frac{dz}{dx} - \sqrt{-m}\, z\right) = 0,$$

qu'on déduit de (1 *ter*) en posant

$$y = e^{-x\sqrt{-m}} z,$$

la valeur suivante de z

$$z = \int_0^\infty e^{-2u\sqrt{m}} (x\sqrt{-1} + u)^n u^n du,$$

et l'on agira de même à l'égard de la seconde des intégrales de l'équation (20).

XI.

» Nous avons déduit de l'équation (12), qui exprime dans tous les cas l'intégrale générale de l'équation (1), trois autres formes de cette intégrale générale, évaluées au moyen d'intégrales définies, facilement exprimables à l'aide des transcendantes eulériennes, et qui ont l'avantage de ne jamais devenir infinies. Toutefois, ainsi que nous l'avons déjà dit, la première n'a lieu que si la constante n est positive, la deuxième exige que n soit négatif et m positif, et la troisième que n et m soient ensemble négatifs.

» On peut renfermer dans un même type les intégrales de toutes les équations différentielles (1) quand n varie.

» Si, en effet, on pose

$$C = \frac{d^{n-1}\left(e^{2x\sqrt{m}} x^{-n}\right)}{dx^{n-1}}, \quad C' = \frac{d^{n-1}\left(e^{-2x\sqrt{m}} x^{-n}\right)}{dx^{n-1}},$$

l'équation (12) deviendra

$$y = Ce^{-\sqrt{m}} + C'e^{x\sqrt{m}}.$$

XII.

» Dans le cas de $m = 1$, on satisfait à l'équation (1 *bis*) en posant

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha;$$

et, comme cette valeur de y ne peut croître indéfiniment avec x, on aura évidemment, en ayant égard à l'équation (19),

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \mathrm{A} e^{-x} \int_0^\infty e^{-2u} (x+u)^n u^n du.$$

Pour déterminer A, soit $x = 0$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^{n+1}} = \mathrm{A} \int_0^\infty e^{-2u} u^{2n} du,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{[\Gamma(n+1)]^2};$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\pi e^{-x}}{[\Gamma(n+1)]^2} \int_0^\infty e^{-2u} (x+u)^n u^n du,$$

formule que j'ai démontrée directement (*).

XIII.

» Les résultats auxquels nous sommes parvenus, et ceux bien plus remarquables que M. Liouville a obtenus dans plusieurs circonstances (**), montrent clairement, non-seulement l'utilité, mais encore la nécessité incontestable de l'intervention du calcul des différentielles à indices quelconques dans une multitude de questions d'analyse et de physique mathématique. Et en effet, une équation différentielle étant donnée, la fonction qui doit lui satisfaire est, en général, une fonction continue, non-seulement de la variable indépendante, mais aussi des paramètres qui entrent dans l'équation différentielle. D'ailleurs ces paramètres peuvent entrer dans l'équation intégrale

---

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VIII, p. 20.

(**) Plusieurs géomètres se sont occupés, dans ces derniers temps, des applications du calcul des différentielles à indices quelconques. Nous citerons en particulier les travaux de MM. Svanberg, Kummer et Jurgensen, publiés à Berlin, par M. Crelle.

comme indices de différentiation, s'ils sont entiers et positifs. Si l'on veut se borner à ce cas particulier, on se prive d'un des plus puissants moyens analytiques, on détruit la généralité des résultats, en renonçant gratuitement à cette admirable loi de la continuité qui fait le fondement de la véritable analyse.

» Nous citerons un exemple célèbre à l'appui de cette assertion.

XIV.

» Si l'on développe la fonction $(1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}}$, suivant les puissances entières et positives de r, le coefficient X_n de r^n sera une fonction rationnelle et entière de x, qui satisfait, comme on sait, à l'équation différentielle

$$(21) \qquad (1 - x^2)\frac{d^2y}{d^2x} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

D'après cela, n étant entier, on sait encore, et il est facile de le vérifier, que l'intégrale générale de l'équation précédente sera

$$y = X_n\left[A + B\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2}\right]:$$

cette valeur de y suppose nécessairement n entier et positif, mais la forme que M. Rodrigues a donnée de l'intégrale complète de l'équation (21) est tout à fait à l'abri de cette particularisation (*).

» Si l'on pose

$$y = \frac{d^p\theta}{dx^p},$$

l'équation (21) devient

$$(1 - x^2)\frac{d^{p+2}\theta}{dx^{p+2}} - 2x\frac{d^p\theta}{dx^p} + n(n+1)\frac{d^p\theta}{dx^p} = 0,$$

et, en prenant l'intégrale de l'ordre $(p + 1)$,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta + [p(p+1) - n(n+1)]\int\theta\,dx = \psi,$$

(*) L'équation (21) rentre immédiatement dans la classe d'équations que M. Liouville a étudiée, XXIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

la fonction ψ devant satisfaire à l'équation

$$\frac{d^p\psi}{dx^p} = 0.$$

Si l'on pose

$$p(p+1) - n(n+1) = 0,$$

on a, en négligeant la fonction ψ,

$$(1 - x^2)\frac{d\theta}{dx} + 2px\theta = 0,$$

d'où

$$\theta = A(1 - x^2)^p,$$

et par suite

$$y = A\,\frac{d^p(1 - x^2)^p}{dx^p}.$$

Or les deux valeurs de p sont $p = n$ et $p = -(n+1)$; l'intégrale générale de l'équation (21) sera donc

$$(22) \qquad y = A\,\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n} + B\int^{n+1}\frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}}.$$

Telle est la formule donnée par M. Rodrigues; elle constitue, dans tous les cas, l'intégrale générale de l'équation (21); si n est entier, la première partie ne diffère de X_n que par un coefficient constant.

» On pourrait arriver à l'intégrale complète (22), si l'on connaissait l'une des intégrales particulières de l'équation (21). Soit, en effet,

$$y = A\,\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}.$$

Si l'on change n en $-n$ dans cette équation ainsi que dans l'équation (21), on aura

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (n-1)ny = 0,$$

équation qui sera satisfaite par

$$y = A\int^n \frac{dx^n}{(1-x^2)^n};$$

on satisfera donc à l'équation (21) en posant

$$y = \mathrm{A}\int^{n+1} \frac{dx^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}},$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

XV.

» Les résultats qui précèdent sont parfaitement connus, et je ne les ai rappelés que pour montrer l'heureuse intervention du nouveau calcul dans un genre de questions qui a si vivement préoccupé nos plus illustres géomètres. On sait en effet que les fonctions X_n, dont nous venons de parler, ne sont qu'un cas particulier des fonctions désignées par Y_n par Laplace, fonctions sur lesquelles repose entièrement la théorie des attractions, et qui jouent un si grand rôle dans la *Mécanique céleste*.

» La longueur de ce Mémoire ne me permet pas d'entrer dans de plus amples développements sur le calcul des différentielles à indices quelconques; mais je me propose d'y revenir dans un prochain travail, où j'en montrerai de nouvelles applications relatives principalement à la théorie des intégrales définies. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. Lemonnier adresse un Mémoire ayant pour titre : *Cosmogonie, ou introduction à l'étude de l'histoire.*

(Commissaires, MM. Arago, Cauchy, Binet.)

M. Levesque adresse une *nouvelle formule* pour calculer l'heure du passage d'un astre au méridien.

(Renvoi à la Commission précédemment nommée.)

CORRESPONDANCE.

Après la lecture du procès-verbal, M. Arago a pris la parole et s'est exprimé à peu près en ces termes :

« Je ne saurais dire à quel point il m'est pénible de revenir sur un sujet » que je devais supposer épuisé; mais il s'agit de la dignité de nos discus» sions, et cette considération lève tous mes scrupules.

» Lorsque M. Libri demanda, dans la dernière séance, si je désirais qu'il » donnât lecture de sa réponse à ma dernière communication au sujet des » manuscrits de Galilée, je crus et je dus croire que cette réponse était la » reproduction, plus ou moins fidèle, de ce que M. Libri avait dit à l'Aca- » démie. Voilà pourquoi je trouvai la lecture superflue. En lisant le *Compte* » *rendu* j'ai vu, et tout le monde a pu voir que M. Libri n'a nullement en- » tendu retracer la discussion verbale de notre séance. M. Libri usait d'un » droit que je n'entends pas contester, en présentant à l'Académie une réfu- » tation *nouvelle* de mon argumentation; seulement, si j'avais compris que » tel était l'objet de sa Note, loin de déclarer qu'il me paraissait suffisant de » la déposer sur le bureau, j'aurais demandé avec instance qu'on en donnât » lecture. Quoi qu'il en soit, je tiens à constater, de la manière la plus ex- » plicite, que cette lecture n'a pas eu lieu; que la Note a seulement été » présentée. Ne craignez pas, au reste, que j'aille critiquer en détail les » nouvelles considérations dont M. Libri s'est étayé, bien que cela fût » très-facile. Il est un point seulement sur lequel je désire appeler l'at- » tention de l'Académie. M. Libri m'impute dans sa Note une personnalité » blessante. Elle serait contenue dans une phrase qu'il cite. Je remarque » d'abord que la phrase a été tronquée par M. Libri. Le sens de cette » phrase ne peut donner lieu à aucune équivoque. J'ai voulu dire et j'ai dit, » en effet, qu'*après la découverte des* manuscrits de Galilée, il n'y avait » plus *aucun intérêt scientifique* à savoir si M. Libri avait eu tort ou raison » en attribuant à l'inquisition la dispersion des écrits de Renieri. On pouvait » assurément taxer ma réflexion de superflue; j'aurais même conçu qu'on » la trouvât d'une vérité par trop évidente; mais il ne me serait jamais » venu à l'esprit qu'on pût y trouver une personnalité.

» Je m'arrête. L'Académie a compris le vrai sens de ma réclamation. Je » ne veux pas que jamais on puisse m'accuser légitimement, d'avoir intro- » duit dans cette enceinte une forme de discussion dont les sciences au- » raient tant à souffrir. »

La réponse de M. *Libri* ne nous a pas été communiquée.

M. le **Ministre de la Guerre** prie l'Académie de vouloir bien comprendre la bibliothèque du Conseil de santé et celles des hôpitaux militaires d'instruction et de perfectionnement dans le nombre des établissements auxquels elle fait don du *Compte rendu* de ses séances.

La Lettre de M. le Ministre est renvoyée à la Commission administrative.

M. **Arago** présente l'instrument rotatif que M. **Breguet** a exécuté, à sa demande, pour soumettre à une épreuve décisive les deux théories de la lumière. M. Arago fait ressortir tout ce que le travail de M. Breguet offre de neuf et d'ingénieux.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Réponse aux remarques faites par* M. Dutrochet *à l'occasion du Rapport sur le Mémoire de* M. O. Leclerc-Thoüin *concernant la maturation du raisin; par* M. DE **Gasparin**.

« Il a été inséré, dans le *Compte rendu* du 14 août dernier, une Lettre de M. Dutrochet, relative à un Mémoire de M. O. Leclerc-Thoüin, dont j'ai été le rapporteur. Sans le départ de M. Dutrochet, cette tâche lui serait échue, car il avait été désigné pour faire partie de la Commission, et son absence seule l'y fit remplacer. Je dois le regretter, car il aurait porté sur le sujet de bien plus vives lumières que je n'ai pu le faire.

» Je ne parlerai pas des reproches qu'il semble m'adresser de n'avoir pas cité les expériences de Duhamel sur l'effeuillage des vignes. Je regardais cette partie du Mémoire comme la moins importante, parce qu'elle ne présentait que des faits connus, et si j'avais voulu m'y étendre, j'aurais eu à citer des expériences qui me sont propres, dont j'ai conféré avec M. Leclerc, et qui auraient été plus circonstanciées que les résultats que Duhamel présente rapidement et sans détail.

» Quant à l'auteur du Mémoire, M. Dutrochet, n'élevant aucune objection contre ses expériences et contre ses résultats, ne l'accuse que d'une faute de logique. Si M. Leclerc, au lieu de partir de l'observation de son cep de vigne, placé à l'ombre de sa serre et ne fructifiant pas, s'était borné à se poser la question de l'influence de l'humidité et de l'obscurité sur la fructification des plantes, l'argumentation de M. Dutrochet manquait de base; il ne pouvait plus lui reprocher de n'avoir pas montré la cause du défaut de production à l'ombre, et d'avoir confondu le fait du développement du germe avec la maturation. Or, je crois que c'est ainsi qu'a procédé M. Leclerc. Arrivé tard à la campagne, frappé de la stérilité d'un cep de vigne placé à l'ombre, il n'a pas cherché directement les causes de cette stérilité, mais il s'est proposé le problème plus général des effets de l'humidité et de la lumière. Il est loin de l'avoir résolu complétement, mais ce qu'il a fait ne doit pas être dédaigné.

» Après les encouragements à poursuivre ses études que lui a donnés l'Académie, il devra reconnaître que la solution doit être cherchée :

» 1°. Sur des plantes qui soient à des époques différentes de végétation;

» 2°. Qui soient mises dans des enceintes de différentes grandeurs;

» 3°. Il comprendra qu'il ne suffit pas de les soumettre à l'influence de l'humidité, soit obscure, soit lumineuse, mais qu'il faut encore qu'elles éprouvent les effets de la sécheresse, soit obscure, soit lumineuse, pour arriver à de bons résultats et constater les effets relatifs de l'évaporation et de la lumière sur la croissance et la fructification des plantes. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Note sur les essais du* Napoléon, *bâtiment à vapeur à hélice, de la force de* 120 *chevaux; par* M. **Philibert Conte.**

« Les essais de vitesse du bâtiment à hélice *le Napoléon,* qui, en dernier lieu, viennent d'être faits en présence du Roi et du prince de Joinville, sont terminés. Les résultats obtenus sont on ne peut plus satisfaisants, et promettent un avenir immense aux propulseurs sous-marins.

» Avec l'hélice à trois filets (1), dont le modèle est ci-joint, et qui, la première, a été expérimentée en France, les vitesses absolues, dégagées de toute influence de vent et de courant, et déterminées par le moyen de bases à terre, aussi bien que par les lochs de $47^{m},42$ et le loch de Massey, ont été trouvées de dix nœuds en moyenne par un temps calme et à la vapeur seule. Ce résultat a été obtenu en prenant pour base la longueur de la digue de Cherbourg, et a été constaté par la Commission supérieure chargée, à la fin de juin dernier, de procéder à la recette du *Napoléon* pour le compte de l'administration des Postes. C'est aussi la vitesse moyenne des traversées qui eurent lieu à la même époque, du Havre à Cherbourg et de Cherbourg à Southampton; contre une grande brise du nord et une mer dure, *le Napoléon,* avec sa haute mâture, filait huit nœuds sept dixièmes et neuf nœuds, résultat remarquable, qui prouve toute la supériorité du propulseur sous-marin sur les roues à aubes : car, dans des conditions semblables, le meilleur bâtiment à roues n'aurait certainement pas filé plus de cinq ou six nœuds.

» L'emploi de la voile, comme auxiliaire de la machine, accroît la vitesse dans des proportions extraordinaires. Par une petite brise, et à mi-vapeur, *le Napoléon* dépasse onze nœuds; à toute vapeur, et par une brise fraîche, il atteint immédiatement douze nœuds et demi et treize nœuds, vitesses inconnues jusqu'à présent pour les bâtiments à vapeur sur mer. A la voile seule, l'hélice étant désembrayée et rendue folle sur ses tourillons, et dans les

(1) Dans des essais postérieurs encore, on a mis quatre filets à la vis, et l'on a obtenu une impulsion plus uniforme et plus douce.

mêmes circonstances de vent, *le Napoléon* filait neuf nœuds au plus près du vent, et avec un quart plein dans la voile, la vitesse a été trouvée de dix nœuds cinq dixièmes.

» Ces essais démontrent d'une manière péremptoire les avantages des moteurs sous-marins sur tous les autres; moins affectés par l'agitation de la mer, ils permettent d'économiser le combustible toutes les fois que le vent est favorable, économie qui peut être supputée *aux deux tiers* de la consommation d'un bâtiment à vapeur à roues dans un long voyage. Enfin, dans des circonstances données de chasse ou de missions pressées, il paraît évident que les bâtiments à hélice atteindront, par la combinaison des deux moteurs, des vitesses inconnues jusqu'ici sur mer.

» Les marins qui ont assisté aux nombreux essais du *Napoléon* paraissent d'accord que la meilleure de nos frégates n'aurait pas filé plus de huit nœuds au plus près, lorsqu'il en filait dix sans voiles et treize avec voiles et vapeur; ils sont convaincus qu'avec de grandes brises de travers, et dans des circonstances qui peuvent se présenter fréquemment, *le Napoléon* pourra arriver jusqu'à quatorze nœuds (26 kilomètres ou 6 à 7 lieues à l'heure).

» L'économie qui résulte de cet accroissement de vitesse donné par l'emploi simultané du vent et de la vapeur, ressort ici d'une manière précise : *le Napoléon* filant dix nœuds en temps calme, l'accroissement de vitesse est de trois nœuds par une brise fraîche. Pour arriver au même résultat, au moyen d'une augmentation de la puissance des machines, il faudrait que cette puissance fût portée de 120 à 260 chevaux, rapport des cubes des vitesses, condition d'ailleurs impossible, mais qui fait ressortir d'une manière positive l'économie considérable qui doit résulter de l'application de l'hélice à des navires fins voiliers.

» Dans les derniers essais qui viennent d'avoir lieu au Tréport en présence du Roi, et sous l'inspection du prince de Joinville, *le Napoléon* a été mis en lutte avec *le Pluton* et *l'Archimède*, bâtiments à vapeur de la marine royale de la force de 220 chevaux, et qui ont une réputation de bons marcheurs. En calme, et à la vapeur seule, *le Napoléon* a dépassé d'un demi-nœud seulement *le Pluton*, qui lui-même a un avantage de près d'un nœud sur *l'Archimède*. *Le Pluton* est un excellent bâtiment, qui peut lutter avantageusement avec les meilleurs bâtiments à vapeur de la marine anglaise.

» A la voile et à la vapeur par une petite brise, mer calme, *le Napoléon* avait un avantage d'au moins deux nœuds sur les deux autres navires. »

PHOTOGRAPHIE. — *Des phénomènes qui déterminent la formation de l'image daguerrienne; par* M. le docteur **Belfield-Lefèvre.**

« La couche iodurée qui doit recevoir l'image de la chambre noire est formée de deux couches superposées et distinctes : une couche superficielle essentiellement composée d'un carbure d'hydrogène ioduré, contenant, à l'état de combinaison ou de condensation, une quantité plus ou moins notable d'oxygène, et une couche profonde essentiellement formée d'iodure d'argent.

» L'action de la lumière sur ces deux couches est successive et distincte : elle agit sur la première en l'oxydant et en la transformant ainsi en une résine iodurée pulvérulente; elle agit sur la seconde en la réduisant, à l'aide de la couche résineuse superposée, à l'état de sous-iodure insoluble. Ainsi, les deux hypothèses principales qui ont été avancées pour expliquer la formation de l'image daguerrienne seraient toutes deux également fondées : l'une, qui veut que la couche impressionnable soit trouée, déchirée, persillée par l'action de la lumière pour permettre à la vapeur du mercure d'atteindre à la surface de l'argent; l'autre, qui explique la formation de l'image par la formation locale de mélanges en proportions différentes d'iodure et de sous-iodure d'argent.

» L'œuvre de la lumière peut donc être divisée en deux périodes bien distinctes : pendant la première période, elle oxyde la couche organique; elle réduit le sel métallique pendant la seconde. Il est évident, dès lors, que l'image sera d'autant plus promptement formée que la couche organique sera de nature plus facilement oxydable, et que la substance dont on aura fait choix pour opérer, sous l'influence de la lumière, la réduction de l'iodure d'argent, aura pour l'iode des affinités plus puissantes.

» Toutes choses égales d'ailleurs, l'image se formera d'autant plus rapidement que la couche organique se rapprochera plus complétement de la composition du carbure d'hydrogène, qu'elle sera étendue en pellicule plus mince à la surface de la plaque, et qu'elle sera plus complétement saturée d'oxygène absorbé. L'acide nitrique, dont M. Daguerre vient de signaler l'action, agit exclusivement comme élément oxydant; il en est de même de l'acide nitreux et vraisemblablement aussi du deutoxyde d'azote, car l'on sait, depuis les expériences de Priestley, que les huiles volatiles absorbent avec avidité le gaz oxyde nitrique avec l'oxygène duquel elles se combinent. Ainsi, si la couche organique est imparfaitement ou inégalement oxygénée, l'exposition de cette couche à l'action des vapeurs nitreuses aura un résultat marqué sur la formation de l'image; mais, dans le cas où cette couche serait déjà

saturée d'oxygène, les vapeurs nitreuses n'auraient d'action qu'en détruisant entièrement la faculté de former image.

» Lorsque l'on expose la couche iodurée à la vapeur du brome, celle-ci est absorbée : une première portion se combine avec le carbure d'hydrogène en déplaçant une quantité équivalente d'iode qui se dégage; une deuxième portion se combine avec l'iode libéré et forme un bromure iodeux. C'est à cette libération de l'iode qu'il faut attribuer le changement de couleur que détermine l'absorption du brome, et c'est la présence de cet iode libre qui explique pourquoi l'on peut exposer impunément la plaque iodurée à l'action de la lumière avant de la soumettre à l'influence du brome, le sous-iodure formé par l'action de la lumière étant de nouveau transformé en iodure par l'action du brome. Mais on sait aussi qu'il y a, pour cette exposition préalable à la lumière diffuse, une limite qu'on ne peut pas dépasser : c'est que l'action du brome, qui peut rétablir la composition de la couche profonde, ne peut pas réintégrer l'organisation de la couche superficielle.

» La transformation, sous l'influence de la lumière, du carbure d'hydrogène bromuré et saturé d'oxygène en une résine pulvérulente, paraît être extrêmement rapide. Il est probable que l'oxygène absorbé se combine et qu'il y a formation simultanée et dégagement d'acide carbonique et d'acide hydrobromique. D'un autre côté, la réduction de l'iodure d'argent en sous-iodure sous l'influence combinée de la lumière et du bromure iodeux est presque instantanée, l'iode libéré faisant passer le bromure iodeux à l'état de bromure iodique. C'est à cette double action sur l'une et l'autre couche qu'il faut attribuer la puissance accélératrice du brome.

» Ainsi, pour des surfaces égales, la quantité de brome que devra absorber une plaque iodurée dépendra essentiellement, et surtout, de la composition chimique, de l'épaisseur et du degré d'ioduration de la couche superficielle. C'est pour cela qu'il est possible de soumettre la couche sensible à l'action accélératrice du brome avant d'en avoir terminé l'ioduration, ce qui serait évidemment impossible si la quantité de brome absorbé devait dépendre, soit de l'épaisseur de la couche d'iodure d'argent, soit de la quantité d'iode libre qui y serait condensé.

» Lorsque la couche iodurée est exposée à l'action d'un excès de brome, celui-ci, au lieu de se substituer à l'iode dans sa combinaison avec le carbure d'hydrogène, réagit sur ce composé pour donner naissance à quelqu'un de ces nombreux produits qui résultent de l'action des éléments oxydants ou des corps halogènes sur des huiles essentielles. Alors la transformation de la couche superficielle en une résine pulvérulente, sous l'influence de la lumière,

ne peut plus s'effectuer : les vapeurs du mercure n'atteignent plus la couche profonde, et l'image n'apparaît plus qu'imparfaitement et comme couverte d'un voile. On conçoit dès lors pourquoi la formation du voile de brome n'est pas un indice certain du degré d'impressionnabilité de la couche sensible, ce phénomène étant dû à une réaction du brome sur la couche organique, et la composition de cette couche organique pouvant être essentiellement différente. Au reste, l'iode lui-même dans certaines circonstances, le chlore, le brome, le cyanogène, et les acides nitrique et nitreux peuvent tous donner naissance à ce phénomène désigné sous le nom de voile du brome.

» Les réactions de la chambre à mercure nous paraissent être celles que MM. Choiselat et Ratel ont si bien décrites. Toutefois nous ferons remarquer que, suivant nous, il ne se formerait pas d'iodure de mercure dans les noirs, l'iodure d'argent étant là protégé par la couche superficielle encore intacte. Nous ajouterons que l'image est d'autant plus longue à paraître que cette couche superficielle est plus épaisse, et que la formation de deutoiodure rouge de mercure est d'autant plus abondante que cette couche a été plus complétement saturée d'iode libre.

» La sensibilité de la couche impressionnable, préparée en se conformant aux indications que nous venons de donner, est bien certainement cent fois plus grande que la sensibilité de la couche iodurée de M. Daguerre : c'est-à-dire que, dans les circonstances de lumière, d'appareil et d'objet où M. Daguerre comptait trois minutes d'exposition, deux secondes peuvent aujourd'hui suffire. Pour préciser davantage encore, nous dirons qu'à Paris, avec la chambre noire de M. Daguerre, du 1er mai au 1er septembre, de dix heures à deux heures, par un ciel bleu et par le plein soleil, le temps d'exposition à la chambre noire devra toujours être compris entre trois et six secondes. En dehors de ces limites ce ne sont pas des anomalies dans l'action de la lumière, mais des défauts dans la sensibilité de la préparation qu'il faut accuser.

» Enfin, quant à la proportionnalité de la réaction chimique à l'intensité de l'action lumineuse, elle est déjà suffisante, ainsi que l'Académie s'en pourra convaincre, pour que le modelé de la végétation verte puisse être rendu avant que les grandes lumières ne soient dépassées. »

Le **Secrétaire** présente, de la part de M. **Édouard Biot**, un Mémoire intitulé : *Observations de Mercure, appelé en chinois l'étoile de l'heure, ou l'étoile de l'eau, extraites de la grande collection impériale des vingt-cinq historiens de la Chine.*

Ces observations, au nombre de trente-sept, remontent jusqu'à l'année 73 avant notre ère.

M. Tessan adresse la relation, écrite par M. Kooke, d'un ras de marée très-extraordinaire observé aux îles Sandwich, le 7 novembre 1837.

M. Lerebours rend compte des bons résultats qu'il a obtenus dans les essais de sa grande lunette, en appliquant des prismes aux oculaires, pour compenser les effets de la force dispersive de l'atmosphère. Cet emploi de prismes, dit M. Lerebours, lui avait été indiqué par M. Arago.

M. Cooper transmet le catalogue de cinquante étoiles télescopiques situées à moins de 2 degrés de distance polaire. Les observations ont été faites en Irlande, comté de Sligo, à Makrée, dans l'Observatoire particulier de M. Cooper.

M. Cauche adresse des images daguerriennes de grandes dimensions, et sur lesquelles, cependant, les objets rectilignes situés près des bords, n'offrent aucune trace de courbure.

M. Benoit, qui avait envoyé, il y a quelques séances, une Note sur des appareils destinés à donner la hauteur des marées sans l'intervention d'un observateur, désigne plus particulièrement à l'attention de MM. les Commissaires qui lui ont été désignés, un de ces appareils dans lequel il a recours à un moyen qui lui paraît entièrement neuf.

M. A. Rodier, médecin dans le département de la Charente-Inférieure, écrit qu'il a été guéri radicalement, par les soins de M. *Jourdant*, d'un bégayement dont n'avait pu le délivrer précédemment un traitement qu'il avait suivi en 1833 et 1834, sous la direction de M. *Colombat*, de l'Isère. M. Rodier affirme d'ailleurs, ainsi que l'avait fait M. A. Becquerel, par l'intermédiaire de qui cette Lettre est transmise, que la méthode de M. Jourdant est complétement distincte de celle de M. Colombat, et même de toutes les méthodes précédemment employées.

Cette Lettre est renvoyée comme document à la Commission chargée de l'examen des diverses Notes relatives à la guérison du bégayement.

M. Passot s'adresse de nouveau à l'Académie, pour obtenir un Rapport sur sa *turbine*. Afin d'éviter les retards qui pourraient résulter de l'absence d'un des Commissaires, M. Poncelet, il demande que la Commission à l'examen de laquelle son appareil a été soumis soit complétée par la nomination d'un nouveau membre.

M. *Binet* est désigné comme membre de cette Commission, en remplacement de M. Poncelet.

M. A. de Figuiery, qui avait soumis au jugement de l'Académie un *dispositif* de son invention, *destiné à représenter les mouvements des corps célestes*, demande que la Commission chargée de l'examen de cet appareil soit complétée par la nomination d'un nouveau membre qui y remplacera feu M. Bouvard.

M. *Laugier* est nommé membre de cette Commission.

M. Legrand écrit relativement à une opinion émise par MM. Danger et Flandin, qui, dans une communication faite récemment à l'Académie, placent l'*or et ses sels* au rang des *poisons métalliques*. « Je crois, dit l'auteur de la Lettre, devoir, dans l'intérêt de la thérapeutique, réclamer contre cette assertion qui ne saurait manquer d'avoir quelque poids dans la bouche de deux chimistes auxquels la toxicologie doit d'aussi intéressantes recherches. J'ai eu de fréquentes occasions d'employer l'or dans le traitement des affections scrofuleuses, et, dans certains cas, je l'ai employé à très-hautes doses, sans avoir jamais vu se développer aucun accident par suite de son administration; je ne crains pas de dire que l'introduction de ce métal, comme médicament, dans l'économie animale, n'entraîne pas plus de danger que l'introduction du fer: si l'on m'objectait cependant que le perchlorure d'or ou le perchlorure d'or et de soude, plus communément employé, donnent lieu, quand ils sont administrés à très-hautes doses par des mains inexpérimentées, à des accidents graves et même mortels, je répondrais qu'il n'arrive, dans ce cas, que ce qui arriverait si l'on donnait de fortes doses de sulfate de fer, de muriate, ou de toute autre préparation ferrugineuse dans laquelle les propriétés toxiques sont dues à l'acide. »

M. Poissenet écrit à l'Académie, pour lui signaler l'état où se trouve aujourd'hui un point de mire qui avait été établi anciennement à Montmartre, et qui devait servir de repère pour la lunette méridienne de l'Observatoire.

M. Arago fait remarquer que ce point de repère est devenu aujourd'hui sans usage, et que, dans l'origine même, il avait été mal placé.

Le Conseil de la Société centrale des Architectes annonce que cette société est définitivement constituée et que ses statuts viennent d'être approuvés par M. le Ministre de l'Intérieur.

M. **Ducros** écrit qu'ayant répété à Tréport des expériences qu'il avait faites précédemment à Paris et à Marseille, concernant l'*action des enduits résineux appliqués sur toute la surface du corps des animaux*, il a vu se confirmer un résultat qui lui semblait déjà ressortir de la comparaison des deux premières séries d'expériences, savoir, qu'à Paris la mort arrive plus promptement qu'au bord de la mer.

L'Académie accepte le dépôt de deux *paquets cachetés* présentés, l'un par M. **Beau**, l'autre par M. **Fizeau**.

La séance est levée à 5 heures. A.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans cette séance, les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 2e semestre 1843; n° 9; in-4°.

Annales des Sciences naturelles; juillet 1843; in-8°.

Journal de Chimie médicale; septembre 1843; in-8°.

Pilote français. — Instructions nautiques (partie des côtes septentrionales de France comprise entre la pointe de Barfleur et Dunkerque), *rédigées par* M. GIVRY, *et publiées par ordre du Roi sous le ministère de* M. le baron DUPERRÉ. Paris, Imprimerie royale, 1843; in-4°.

Recherches sur le gisement et le traitement direct des Minerais de fer dans les Pyrénées, et particulièrement dans l'Ariége; par M. LEFRANÇOIS; 1843, 1 vol. in-4°, avec planches et dessins au microscope par M. F. MERCADIER. (Envoyé pour le concours de Statistique.)

Annales maritimes et coloniales; n° 7; août 1843; in-8°.

Dictionnaire universel d'Histoire naturelle; tome IV, 38e livr.; in-8°.

Géométrie des Courbes appliquée aux Arts; par M. BERGERY; 2e édit., in-8°.

Mémoire ou Observations soumises à MM. les membres de la Société géologique réunis en congrès à Aix, touchant la chaleur centrale de la Terre; par M. VALLET-D'ARTOIS; broch. in-8°.

Analyse chimique de l'eau du puits artésien foré au nord, dans la grande cour de la caserne de cavalerie à Cambrai; par M. TORDEUX. Cambrai, 1843; in-8°.

Nouvelle Théorie de l'Électricité; nécessité des forêts pour le bien-être de l'Agriculture en général; par M. ADDENET. Paris, in-8°.

De l'importance du Crédit public; par le même; in-8°.

Société centrale des Architectes, autorisée par décision de M. le Ministre de l'Intérieur, en date du 27 mai 1843; in-8°.

Recueil de la Société polytechnique; juillet 1843; in-8°.

Bulletin de la Société industrielle d'Angers; mai et juin 1843; in-8°.

Journal des Connaissances utiles; n° 7; août 1843; in-8°.

Annales de Thérapeutique médicale et chirurgicale, et de Toxicologie; septembre 1843; in-4°.

Gazette médicale de Dijon et de la Bourgogne; septembre 1843; in-8°.

Bibliothèque universelle de Genève; juillet 1843; in-8°.

Analyse nouvelle des ouvertures du Jeu des échecs; par M. DE JAENISCH. Saint-Pétersbourg, 2 vol. in-8°.

Mémoire sur la découverte de la loi du choc direct des Corps durs, publiée en 1667 *par* ALPHONSE BORELLI, *et sur les formules générales du choc excentrique des Corps durs ou élastiques, avec la solution des trois problèmes concernant les oscillations des pendules; suivi d'un Appendice où l'on expose la théorie des oscillations et de l'équilibre des Barreaux aimantés; par* M. PLANA. Turin; in-4°.

Astronomical... *Observations astronomiques faites à l'Observatoire Radcliffe d'Oxford, année* 1840, *par* MM. J. JOHNSON; vol. Ier. Oxford, 1842; in-8°.

Astronomische... *Nouvelles astronomiques de* M. SCHUMACKER, n° 486.

Gazette médicale de Paris; t. IX, n° 35.

Gazette des Hôpitaux; t. V, nos 102 à 104.

L'Écho du Monde savant; 10e année, nos 17; in-4°.

L'Expérience; n° 322; in-8°.

L'Atelier; n° 12.

OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES. — AOUT 1843.

JOURS du MOIS.	9 HEURES DU MATIN.			MIDI.			3 HEURES DU SOIR.			9 HEURES DU SOIR.			THERMOMÈTRE.		ÉTAT DU CIEL A MIDI.	VENTS A MIDI.
	BAROM. à 0°.	THERM. extér.	HYGROM.	BAROM. à 0°.	THERM. extér.	HYGROM.	BAROM. à 0°.	THERM. extér.	HYGROM.	BAROM. à 0°.	THERM. extér.	HYGROM.	MAXIMA.	MINIMA.		
1	758,01	+17,3		757,40	+20,1		756,68	+21,6		756,04	+16,7		+22,5	+11,0	Beau................	O faible.
2	752,82	+19,5		752,08	+24,6		752,02	+23,0		752,40	+17,6		+26,9	+13,8	Quelques éclaircies......	O.
3	751,88	+17,9		752,14	+19,8		751,68	+21,3		751,94	+15,0		+22,8	+14,5	Nuageux............	S. S. O.
4	750,92	+19,2		750,75	+19,5		750,83	+20,4		750,91	+14,2		+21,8	+12,9	Nuageux............	O.
5	754,36	+17,0		754,93	+19,4		755,76	+20,3		757,31	+16,6		+22,0	+10,8	Très-nuageux.........	O.
6	757,63	+16,5		758,82	+20,1		759,33	+21,5		762,06	+16,3		+22,6	+12,2	Nuageux............	O.
7	764,21	+20,3		764,08	+21,3		763,93	+22,6		764,33	+20,1		+24,2	+10,0	Nuageux............	O.
8	764,57	+19,6		763,55	+22,8		762,50	+26,4		760,56	+21,2		+28,0	+17,0	Très-nuageux.........	N. O.
9	759,30	+23,6		758,34	+26,3		757,10	+27,2		756,27	+21,5		+29,0	+17,0	Très-nuageux.........	N. O.
10	755,11	+23,8		755,09	+25,4		755,08	+26,6		758,34	+19,5		+29,0	+16,8	Couvert.............	N. O.
11	761,51	+15,9		761,57	+18,9		761,20	+20,8		762,42	+15,5		+21,8	+13,8	Très-nuageux.........	N. N. O.
12	762,97	+17,2		762,13	+19,5		761,07	+20,8		761,65	+17,4		+22,0	+11,0	Nuageux............	N. N. O.
13	760,71	+17,2		759,76	+20,3		758,54	+23,0		758,37	+17,8		+23,7	+12,7	Très-nuageux.........	N. E.
14	756,92	+19,8		756,03	+24,7		755,37	+25,2		755,69	+20,3		+25,0	+14,3	Très-nuageux.........	E. N. E.
15	755,67	+24,4		755,49	+27,0		754,85	+27,6		756,16	+21,3		+29,9	+14,0	Nuageux............	E.
16	757,78	+20,7		757,62	+23,8		757,20	+23,5		758,06	+19,9		+25,5	+16,0	Très-nuageux.........	S. O.
17	758,78	+22,7		758,36	+25,5		757,89	+27,0		758,70	+23,2		+28,3	+16,8	Quelques nuages......	E.
18	757,61	+19,5		756,23	+28,2		755,11	+29,1		753,69	+25,0		+30,5	+18,3	Beau................	E.
19	751,47	+25,1		750,72	+28,0		750,52	+18,3		751,16	+18,2		+30,8	+17,2	Beau................	S. S. E.
20	751,15	+16,7		750,87	+21,5		751,00	+20,8		752,38	+18,0		+23,2	+16,0	Très-nuageux.........	O.
21	756,89	+16,0		756,95	+19,2		756,78	+21,2		755,91	+16,2		+22,0	+14,9	Nuageux............	O. N. O.
22	752,64	+19,8		751,65	+19,8		750,83	+20,5		749,49	+17,0		+22,0	+12,0	Couvert.............	S. S. O.
23	750,72	+18,4		749,69	+21,4		748,72	+18,8		743,46	+18,3		+21,8	+14,0	Couvert.............	S.
24	749,81	+17,2		752,37	+19,4		754,07	+20,8		755,87	+17,4		+21,6	+15,1	Couvert.............	O. S. O. fort.
25	756,49	+18,6		756,02	+25,4		755,67	+25,8		756,38	+21,2		+26,5	+12,2	Très-nuageux.........	O.
26	756,94	+18,8		757,82	+21,6		758,38	+24,0		760,83	+19,8		+24,9	+17,2	Pluie...............	O. S. O.
27	761,70	+15,9		760,50	+20,2		759,76	+22,1		760,71	+17,1		+23,0	+15,3	Quelques nuages......	O. S. O.
28	760,16	+21,5		759,67	+24,8		758,54	+24,8		759,73	+18,7		+24,8	+12,2	Beau................	O.
29	759,97	+21,6		759,45	+24,6		759,06	+25,2		759,26	+19,8		+26,0	+17,2	Couvert.............	O. S. O.
30	759,87	+23,8		759,39	+27,6		758,92	+27,6		759,96	+23,1		+29,0	+16,0	Nuageux............	S. S. O.
31	761,63	+23,3		761,27	+27,4		760,93	+28,8		761,87	+24,0		+30,0	+18,3	Beau................	S. O.
1	756,88	+19,5		756,72	+21,9		756,49	+23,0		757,02	+17,9		+24,9	+13,6	... Moy. du 1er au 10	Pluie en centimètres.
2	757,46	+19,9		756,88	+23,7		756,27	+23,6		756,83	+19,7		+26,1	+15,0	... Moy. du 11 au 20	Cour.. 4,846
3	756,99	+19,5		756,80	+22,9		756,51	+23,6		756,68	+19,3		+24,7	+14,9	... Moy. du 21 au 31	Terr.. 4,466
	757,10	+19,6		756,80	+22,9		756,29	+23,4		756,83	+19,0		+25,2	+13,6	... Moyenne du mois......	+ 19°,4